erschienen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1993, S.137-140, Hildesheim: Franzbecker

Christa KAUNE, Osnabrück

Vom logischen Denken zum logischen Rechnen

Neuere Entwicklungen im Bereich der Künstlichen Intelligenz weisen der Mathematik eine neue Rolle zu. Nicht numerische Beziehungen, sondern die Präzisierung von intuitivem Wissen ist Gegenstand der Mathematisierung. Bei einer Modernisierung der Schulmathematik kann diese Rolle der Mathematik nicht unberücksichtigt bleiben. In diesem Beitrag soll aufgezeigt werden, wie man Schülern einen Einblick in die Formalisierung intuitiven Wissens in der Prädikatenlogik mit daran anschließender Darstellung in PROLOG geben kann, wenn diese Schüler vorher nach dem Konzept des Schulversuchs "Integration algorithmischer und axiomatischer Denkweisen in den gymnasialen Mathematikunterricht der Klasse 7/8" ([3]) unterrichtet worden sind. Diese Vorbereitung hat in den Köpfen der Schüler ein mentales Modell entstehen lassen, in dem sie die Problematik der Präzisierung von Wissen und der Abstraktion bei Begriffsbildung bis hin zu einer Axiomatisierung im Rahmen einer Unterrichtsreihe ([1]) in der Klassenstufe 8 kennengelernt haben.

1. Konzeption der Unterrichtsreihe

Für Klasse 9 haben wir eine Unterrichtsreihe "Vom logischen Denken zum logischen Rechnen" ([2]) im Umfang von 20 Unterrichtsstunden konzipiert und in mehreren Klassen durchgeführt. In ihr haben wir Schülern einen altersgemäßen Einstieg in die grundlegende Problematik der Formalisierung von Wissen gegeben. Ausgangspunkt ist der Versuch, Wissen über Verwandtschaftsverhältnisse so zu präzisieren, daß es sich als Grundlage für die Bestimmung von Erbfolgen im Erbrecht eignet. Die anschließende Formalisierung in der Prädikatenlogik ist dann unmittelbar Grundlage für eine Darstellung in PROLOG und damit Beispiel für ein kleines Expertensystem.
Durch diese Verbindung von Axiomatisierung, Formalisierung und Rechnerimplementation in PROLOG soll für die Schüler aufgezeigt werden, daß die Benutzung von Expertensystemen ihrer philosophischen Natur nach Einsichten in den Zusammenhang

zwischen der Verwendung einer formalen Sprache und der Bedeutungskonstitution benutzt, welche seit Anfang unseres Jahrhunderts Thema der Grundlegung der Mathematik sind. Durch das Vorhandensein von Rechnern im Unterricht und die Verfügbarkeit von PROLOG hat sich die Evidenzbasis verändert. Was vor 30 Jahren im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichtes aus prinzipiellen Gründen angezeigt sein konnte und als Beispiel einer Behandlung der philosophischen Grundlagen von Mathematik für einen gymnasialen Mathematikunterricht konzipiert werden konnte, hat sich durch diese Veränderung des technologischen Umfeldes überraschend als ein Teil einer angewandten Mathematik herausgestellt. Die Begründung, einen solchen Inhalt zu unterrichten, sollte für die Schüler diesen Spannungsbogen zwischen Grundlagen und Anwendung sichtbar machen. Die grundlegenden Werkzeuge sind prinzipieller Art, die Beurteilung der gesellschaftlichen Nützlichkeit ist an das technologische Umfeld gebunden.

Aus der Unterrichtserfahrung läßt sich sagen, daß dieser Spannungsbogen gelungen ist. Das im Rahmen des oben genannten Schulversuchs vorhandene besondere Training im Formalisieren und die Verfügbarkeit einer Modellvorstellung über die Präzisierung von Begriffen schaffen die Möglichkeit, die Einführung von PROLOG der formalen Präzisierung in der Prädikatenlogik aufzusetzen. Umgekehrt schafft die Erfahrung eines lauffähigen Systems einen enormen Motivationsschub für die Schüler. Die Nützlichkeit von universellen kognitiven Werkzeugen wie Präzisierung und Formalisierung wird nicht nur verstandesmäßig eingesehen, sondern erhält auch einen emotionalen, verstärkenden Schub. Das Erbrecht als Einführungsbeispiel hat sich insofern bewährt, daß in einer Metaebene ein naives Verständnis für die Tragfähigkeit der Begriffsbildung vorhanden ist, von den Schülern unterschiedliche Präzisierungen des intuitiven Wissens vorgenommen werden können, und die technischen Formalisierungen so sind, daß die Schüler die Adäquatheit eigenständig kontrollieren können.
Ein Motiv für die Behandlung dieser Unterrichtsreihe im Mathematikunterricht besteht natürlich auch darin, daß als

Ergebnis dieser Verbindung von Grundlagenaspekt und Anwendung eine neue Ausgangsbasis vorhanden ist, in der jetzt ohne emotionale Probleme immer wieder das Werkzeug "präzise Darstellung mathematischen Wissens" aufgerufen und benutzt werden kann. Diese Unterrichtsreihe hat deshalb einen wichtigen Stellenwert in einer kognitionswissenschaftlich orientierten Ausrichtung des gymnasialen Mathematikunterrichts ([3]).

2. Zur Rolle der Rekursion bei der Begriffsbildung

Die Behandlung des Begriffs "Abkömmling" hat aus didaktischer Sicht folgende Vorteile: Ein naiver Versuch, den Begriff zu erklären, läßt sich im Unterrichtsgespräch so steuern, daß er auf eine rekursive Begriffsbildung hinausläuft. Schüler formulieren, daß sie es eigentlich in dieser Weise erklären würden, wenn man doch bloß nicht verabredet hätte, daß diese Art von Rückbezug in einer Begriffserklärung verboten ist. Im Sinne eines sequentiellen Problemlösens und in Verbindung mit einer funktionalen Auffassung von Begriffen kommt man dann auf die Idee, doch einmal die Wirkungsweise einer solchen, im Prinzip nicht zulässigen Begriffsbildung zu untersuchen.
Bei der von uns vorgenommenen Einführung einer rekursiven Definition handelt es sich nicht darum, Rekursion als einen Trick zur Programmierung zu behandeln, welcher besonders elegant ein Problem zu lösen gestattet, sondern sie ergibt sich als eine in der Umgangssprache durchaus zulässige Form der Erklärung, bei der die Regelverletzung eigentlich erst im nachhinein bewußt wird.

3. Dokumentation einer Schülerlösung

Mit der folgenden Klassenarbeit und den sich anschließenden Lösungen einer Schülerin soll dokumentiert werden, was wir unter dem Unterrichtsstil "Präzisierung und Formalisierung intuitiven Wissens" verstehen und wie unbefangen Schüler sowohl über syntaktische Aspekte reden als auch über die Wirkungsweise ihrer Präzisierungsinstrumente sprachlich verfügen können. Bei diesem kognitionswissenschaftlichen Ansatz von Mathematikunterricht ist es nicht verwunderlich, daß Instrumente der Metakognition eine große Rolle spielen.

Gymnasium Bad Iburg, Klasse $9F_1$ Nr. 4 11.2.93 Aufgabe 3:

Karsten gibt folgende Definition des Prädikates "x ist Schwägerin von y":

$$Ixy :\leftrightarrow \bigvee_{z} (Kzy \land Txz) \land \neg Sxy \land \neg x=y$$

mit Sxy: x ist Schwester von y,
Kxy: x ist Kind von y und Txy: x ist Tante von y

Julia: "Das ist falsch. In Definitionen dürfen nur Grundbegriffe verwendet werden. Tante ist aber sicher kein Grundbegriff. Deshalb ist deine Definition falsch."
Josef: "Ich bin auch der Meinung, daß deine Definition falsch ist. Entweder mußt du in der Definition Txy verwenden, oder aber in der Erklärung der Prädikate festelegen, was man unter Txz verstehen soll. So paßt es jedenfalls nicht zusammen."
Jens: "Falsch ist die Definition schon aus dem Grund, daß die Klammer hinter dem Existenzquantor viel zu früh geschlossen wurde. "Klammer zu" muß ans Ende, dann wäre sie korrekt."

a) Bewerte die Definition.
b) Nimm jeweils Stellung zu den drei Schüleräußerungen.

Karolines Lösungen der Aufgabenteile a und b:
a) "Die Definition reicht nicht aus als eine Definition des Begriffes "Schwägerin", wie er uns bekannt ist. Man kann auch eine Schwägerin haben, die keine Kinder hat und man kann auch eine Schwägerin sein, ohne Kinder zu haben. Das müßte Karsten in seiner Definition ergänzen.
b) zu Julia: Erstens können Definitionen nicht falsch sein. Sie können höchstens nicht dem entsprechen, was wir unter dem zu definierenden Begriff verstehen. Definitionen sind nur dann falsch, wenn sie Syntaxfehler enthalten. Zweitens kann Karsten Prädikate verwenden, die keine Grundbegriffe sind, wenn er sie anschließend erklärt. Das hat Karsten getan.
zu Josef: Josefs Aussage ist ebenfalls nicht korrekt. Man darf die Prädikate mit anderen Variablen erklären, als man sie in der Definition benutzt. Es kommt nur auf die Reihenfolge der Variablen an. Beispiel: Gxy:x ist Großvater von y ist nicht dasselbe wie Gxy: x hat y als Großvater.
zu Jens: Die "Klammer zu" muß nicht ans Ende, da nach der "Klammer zu", wie Karsten sie gesetzt hat, kein z mehr benutzt wird."

4. Literatur

[1] Cohors-Fresenborg, E./Griep, M./Kaune, C.: Sätze aus dem Wüstensand und ihre Interpretationen. Textbuch für Schüler und Handbuch für Lehrer. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1992

[2] Cohors-Fresenborg, E./Kaune, C./Griep, M.: Vom logischen Denken zum logischen Rechnen. Textbuch für Schüler und Handbuch für Lehrer. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1993

[3] Cohors-Fresenborg, E.: Zur Neuorientierung des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund Neuer Technologien. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 1993