Beherrschen und Verstehen

GDM Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik
Nürtingen, 27. November 2015

pinkernell@ph-heidelberg.de

MNU Themenreihe Bildungsstandards

Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen

Guido Pinkernell, Heidelberg; *Hans-Jürgen Elschenbroich*, Korschenbroich; *Gaby Heintz*, Neuss; *Henning Körner*, Oldenburg; *Hubert Langlotz*, Eisenach; *Andreas Pallack*, Soest

http://tinyurl.com/MNU-WuK-Sek2

pinkernell@ph-heidelberg.de

1. Vom „Was?“ zum „Wie?“

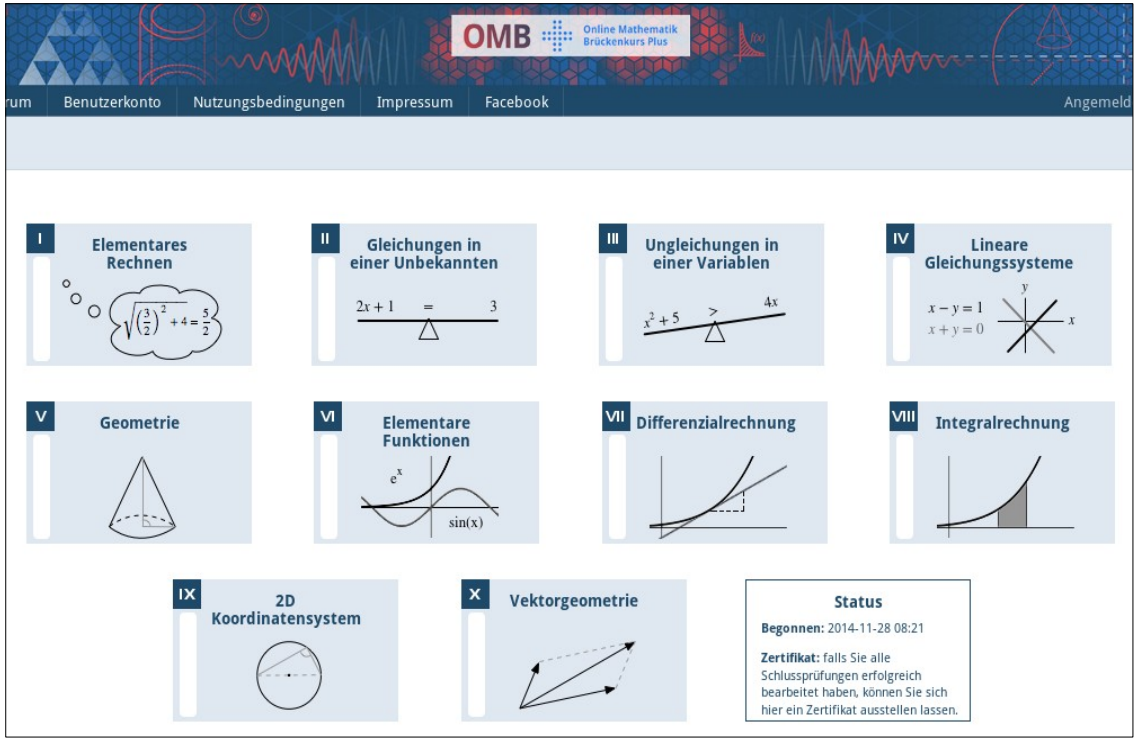
2. Aufgabenbeispiele

3. MNU – Grundlegendes Wissen und Können : Leitgedanken

pinkernell@ph-heidelberg.de

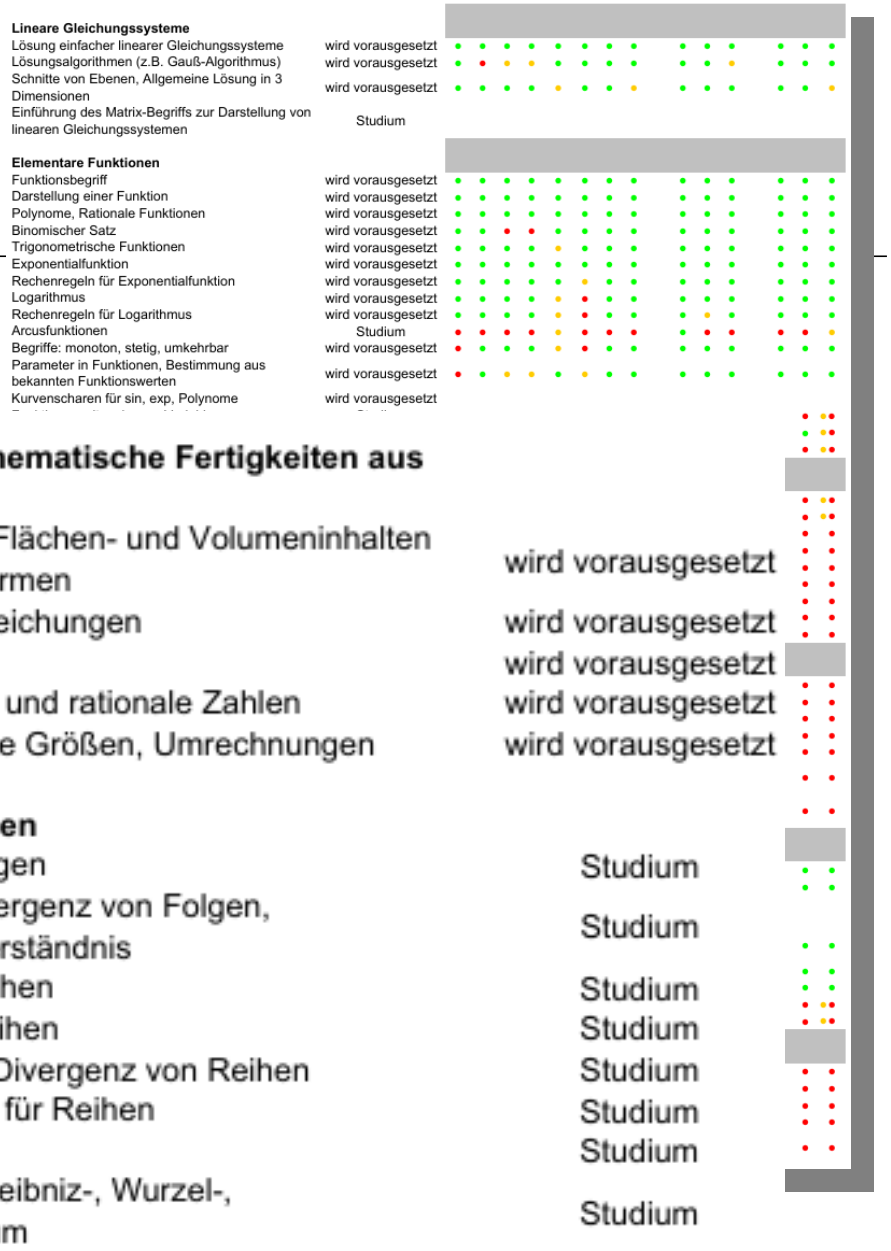
Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst



Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst



Lineare Gleichungssysteme	
Lösung einfacher linearer Gleichungssysteme	wird vorausgesetzt
Lösungsalgorithmen (z.B. Gauß-Algorithmus)	wird vorausgesetzt
Schnitte von Ebenen, Allgemeine Lösung in 3 Dimensionen	wird vorausgesetzt
Einführung des Matrix-Begriffs zur Darstellung von linearen Gleichungssystemen	Studium
Elementare Funktionen	
Funktionsbegriff	wird vorausgesetzt
Darstellung einer Funktion	wird vorausgesetzt
Polynome, Rationale Funktionen	wird vorausgesetzt
Binomischer Satz	wird vorausgesetzt
Trigonometrische Funktionen	wird vorausgesetzt
Exponentialfunktion	wird vorausgesetzt
Rechenregeln für Exponentialfunktion	wird vorausgesetzt
Logarithmus	wird vorausgesetzt
Rechenregeln für Logarithmus	wird vorausgesetzt
Arcusfunktionen	Studium
Begriffe: monoton, stetig, umkehrbar	wird vorausgesetzt
Parameter in Funktionen, Bestimmung aus bekannten Funktionswerten	wird vorausgesetzt
Kurvenscharen für sin, exp, Polynome	wird vorausgesetzt

Elementare mathematische Fertigkeiten aus der Mittelstufe	
Berechnung von Flächen- und Volumeninhalten geometrischer Formen	wird vorausgesetzt
Umstellen von Gleichungen	wird vorausgesetzt
Bruchrechnung	wird vorausgesetzt
Zahlbegriff, reelle und rationale Zahlen	wird vorausgesetzt
Einheitenbehaftete Größen, Umrechnungen	wird vorausgesetzt
Folgen und Reihen	
Beispiele von Folgen	Studium
Konvergenz / Divergenz von Folgen, anschauliches Verständnis	Studium
Arithmetische Reihen	Studium
Geometrische Reihen	Studium
Konvergenz und Divergenz von Reihen	Studium
Konvergenzsätze für Reihen	Studium
Cauchy-Produkt	Studium
Partialsummen, Leibniz-, Wurzel-, Quotientenkriterium	Studium

pinkernell@ph-heidelberg.de

Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst

Wirtschaftswissenschaft
Wirtschaftsinformatik

- Arithmetik und Algebra
- Geometrie
- Elementare Logik und Mengenlehre
- Kombinatorik, Folgen, Reihen
- Gleichungen
- Funktionen, Analysis

Psychologie, Soziologie, Politik, Verwaltung, Bildungswissenschaften

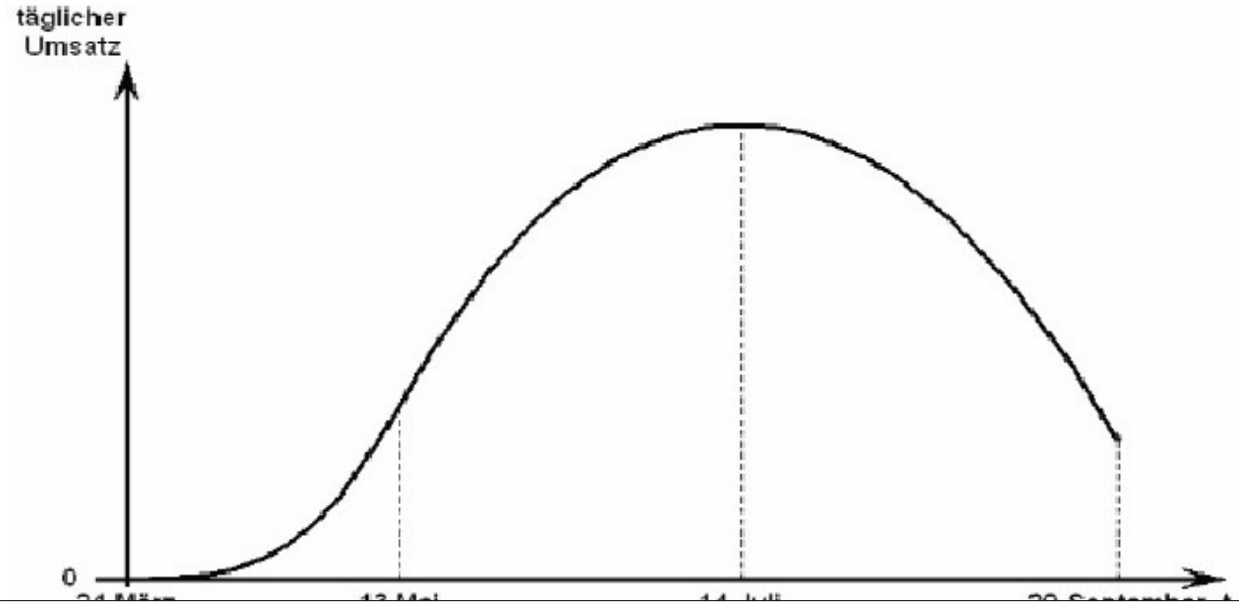
- Mathematisch-statistische Vorkenntnisse

Mathematik, Informatik

- Rechnen, Terme Gleichungen, Ungleichungen

Vom „Was

- Inhalte zuerst



8. Aufgabe
a und b seie
kleiner als b

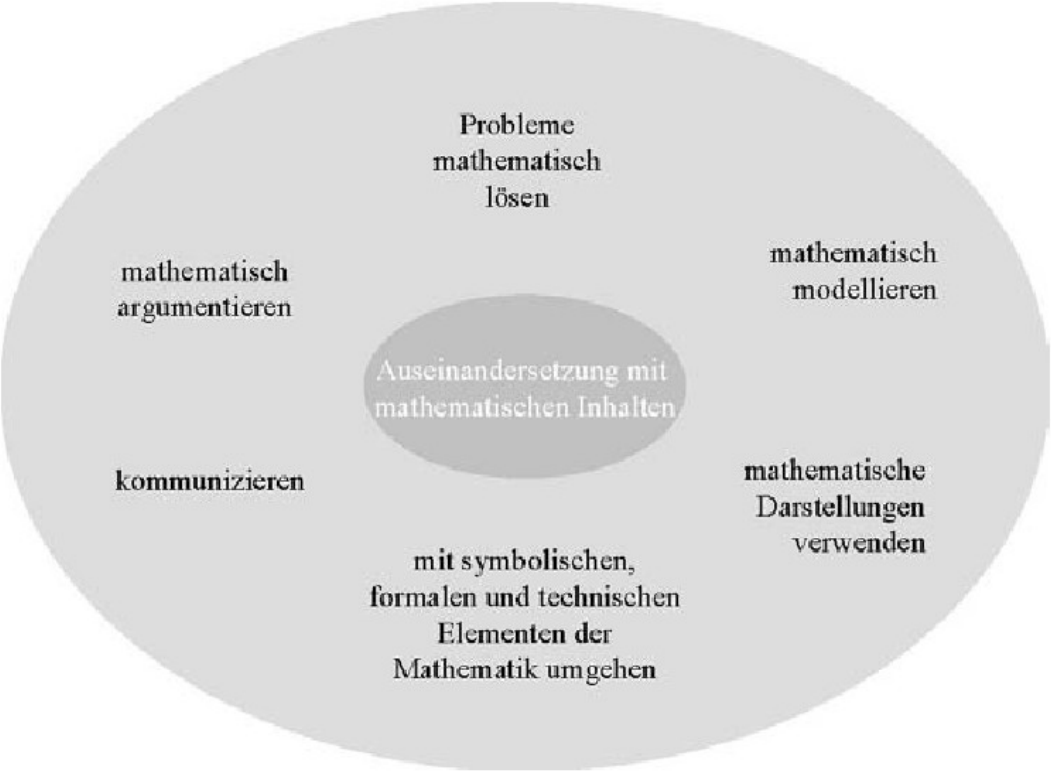
Aufgabe 3.2. Welche der folgenden Rechenregeln für Wurzeln ist richtig?

- ☐ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ☐ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ☐ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$
- ☐ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- ☐ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

☐ Falsch
☐ Falsch
☐ Falsch
☐ Falsch

Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst
- Auch noch „Kompetenzen“?



pinkernell@ph-heidelberg.de

Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst
- Auch noch „Kompetenzen“?

cosh

cooperation schule:hochschule

Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0)

DER HOCHSCHULEN BADEN-WÜRTTEMBERGS FÜR EIN STUDIUM VON WIMINT-FÄCHERN

(Wirtschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik)

pinkernell@ph-heidelberg.de

Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst
- Auch noch „Kompetenzen“?

Universität Zürich

Institut für Erziehungswissenschaft

Franz Eberle, Christel Brüggenbrock

Christian Rüede, Christof Weber, Urs Albrecht

Basale fachliche Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit in Mathematik und Erstsprache

Kurzbericht zuhanden der EDK

12. Oktober 2014
(revidierte Fassung vom 12. Januar 2015)

pinkernell@ph-heidelberg.de

Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst
- Auch noch „Kompetenzen“?

Eberle et al. 2015:

- Befragung von Studierenden und Evaluation ihrer Mitschriften und Materialien aus den ersten Studiensemestern
- Ergebnis:

  Flexibles Beherrschen mathematischen Handwerkzeugs

  Adaptiver Umgang mit mathematischen Darstellungen

  Beziehungsreicher Umgang mit mathematischen Begriffen
- Adaptivität als zentrales Merkmal der hier deutlich werdenden Anforderungen,
- Insb. verstanden als Transfer von Schulwissen auf Inhalte aller „mathematikhaltigen“ Studiengänge (Psych, Bio, Phy, Math, WW, ...)

pinkernell@ph-heidelberg.de

Vom „Was?“ zum „Wie?“

- Inhalte zuerst
- Auch noch „Kompetenzen“?
- In jedem Fall Verstehen

Weinert, E.F. (1996): „Intelligentes Wissen“

»Darunter versteht man

- ein wohlorganisiertes, disziplinär, interdisziplinär und lebenspraktisch vernetztes System von flexibel nutzbaren Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kenntnissen und metakognitiven Kompetenzen.
- Voraussetzung dafür und Resultat davon ist ein sachlogisch aufgebautes, systematisches, inhaltsbezogenes Lernen, das grundlegende Kenntnislücken, Verständnisdefizite und falsche Wissenselemente vermeidet.«

Und aus der „Klieme-Expertise“ zu den Bildungsstandards (2007)

- „Der Erwerb von Kompetenzen muss [...] beim systematischen Aufbau von intelligentem Wissen in einer Domäne beginnen“

pinkernell@ph-heidelberg.de

Vom „Was?“ zum „Wie?“

Eine inhaltsbasierte Wissens- und Könnensgrundlage
für die Kompetenzausbildung in weiterführenden Lernsituationen,
die sich durch ein Beherrschen und Verstehen
zentraler Begriffe und Verfahren ausdrückt.

pinkernell@ph-heidelberg.de

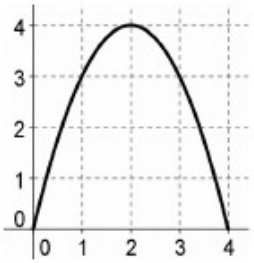
1. Vom „Was?“ zum „Wie?“

2. Aufgabenbeispiele

3. MNU – Grundlegendes Wissen und Können : Leitgedanken

pinkernell@ph-heidelberg.de

Aufgabenbeispiele



Der Graph zeigt die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion eines sich bewegenden Objekts. Welche Aussagen sind wahr?

1

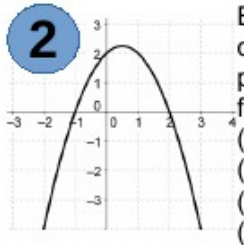
Bei t = 2…

(A) wird die maximale Geschwindigkeit erreicht.

(B) wird die maximale Wegstrecke erreicht

(C) ist die Beschleunigung gleich 0.

2



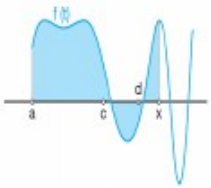
Entscheide graphisch: f'(2) = …

(A) -3

(B) -1

(C) 0

(D) 2



Ordnen Sie durch Angabe der richtigen Buchstabenfolge der Größe nach:

5

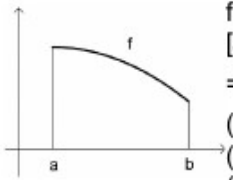
$a = \int_a^a f(t)\,dt$

$b = \int_a^c f(t)\,dt,\ c = \int_c^d f(t)\,dt$

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2}{5}$.

Geben Sie die Steigung der Tangente am Graphen von f in P(2,5 | f(2,5)) an.

3



f:IR → IR sei wie abgebildet auf [a,b] monoton fallend. Dann ist F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ auf [a,b]

(A) monoton fallend

(B) konstant

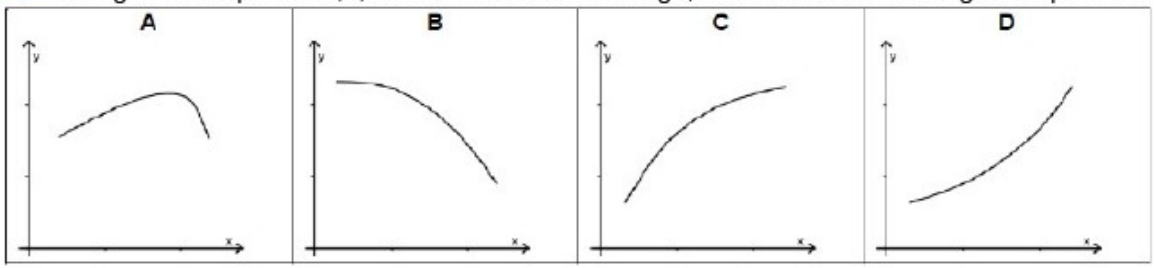
(C) monoton steigend

6

4

1	2	3	4
Na endlich! Rückgang der Arbeitslosenzahlen beschleunigt sich.	**Schulentwicklung** Dramatischer Rückgang der Schülerzahl	**Klimakatastrophe** Die Durchschnittstemperaturen wachsen immer schneller.	**Erfreulich!** Die Zunahme der Verkehrsunfälle konnte verringert werden

Bringe die Graphiken a,b,c und d in eine Reihenfolge, dass sie zu den Schlagzeilen passen.



Welche der folgenden Aussagen treffen auf Polynomfunktionen dritten Grades zu? Der Graph hat in jedem Fall…

7

(A) lokale Extrempunkte

(B) einen Wendepunkt

(C) einen Sattelpunkt

pinkernell@ph-heidelberg.de

1. Vom „Was?“ zum „Wie?“

2. Aufgabenbeispiele

3. MNU – Grundlegendes Wissen und Können : Leitgedanken

pinkernell@ph-heidelberg.de

MNU Themenreihe Bildungsstandards

Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen

Guido Pinkernell, Heidelberg; *Hans-Jürgen Elschenbroich*, Korschenbroich; *Gaby Heintz*, Neuss; *Henning Körner*, Oldenburg; *Hubert Langlotz*, Eisenach; *Andreas Pallack*, Soest

http://tinyurl.com/MNU-WuK-Sek2

pinkernell@ph-heidelberg.de

MNU: Grundwissen und -können – Leitgedanken

Schulperspektive

- orientiert an den inhaltlichen Zielformulierungen der KMK BS „Oberstufe“

pinkernell@ph-heidelberg.de

… Zielformulierungen der KMK BS „Oberstufe“

Ableitungen und bestimmte Integrale deuten und bestimmen:

1. die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle als lokale Änderungsrate und als Steigung einer Tangente an Gf deuten
2. das bestimmte Integral über eine Funktion f als (re-)konstruierten Bestand und als eine durch Gf begrenzte Fläche deuten
3. Änderungsraten und Tangentensteigungen sowie Bestände und Flächeninhalte numerisch, graphisch bzw. algebraisch bestimmen

Prozesse mittels Ableitungs- und Integralfunktionen beschreiben:

4. Änderungsraten und rekonstruierte Bestände in Form von Ableitungs- und Integralfunktionen funktional beschreiben und interpretieren

Funktionen mittels Differenzial- und Integralrechnung beschreiben:

5. zur algebraischen Bestimmung von Ableitungsfunktionen die Faktor-, Summen- und Produktregel nutzen (und die Kettenregel nur in einfachsten Fällen)
6. zur algebraischen Bestimmung von Stammfunktionen die Faktor- und Summenregel nutzen
7. Monotonieeigenschaften und insb. Extrema von Funktionen bestimmen

pinkernell@ph-heidelberg.de

MNU: Grundwissen und -können – Leitgedanken

Schulperspektive

- orientiert an den inhaltlichen Zielformulierungen der KMK BS „Oberstufe“
- orientiert am Allgemeinbildungsauftrag des gymnasialen Unterrichts
- konzipiert auf Basis etablierter unterrichtsdidaktischer Prinzipien

Beherrschen und Verstehen

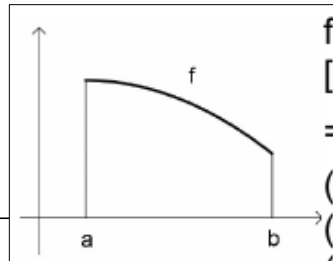
pinkernell@ph-heidelberg.de

Ergänzen Sie die Lücken in folgender Tabelle:

$f(x)$	$\frac{1}{x^2}$		e^x		$\sin(x)$	
$f'(x)$		$\frac{1}{x^2}$		e^x		$\sin(x)$

Geben Sie die Steigung der Tangente am Graphen von f in P(2,5 | f(2,5)) an

3



f:IR → IR sei wie abgebildet auf [a,b] monoton fallend. Dann ist F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ auf [a,b]

(A) monoton fallend
(B) konstant
(C) monoton steigend

6

- **Grundaufgaben**
- **Umkehraufgaben**

- **ikonis**
- **symbo** … **ch**

Verfahren im operativen Sinne beherrschen

Grund- und Fehlvorstellungen aktivieren bzw. vermeiden

Repräsentationswechsel durchführen

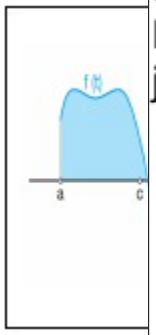
inner- und außermathematische Anwendungen

- **erklärende Handlungen und Vorstellungen**
- **typische Fehler**
- **typische Anwendungen im Alltag und in der**

Welche der folgenden Aussagen treffen auf Polynomfunktionen dritten Grades zu? Der Graph hat in jedem Fall…

7

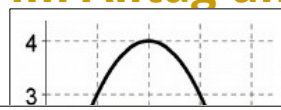
(A) keine lokalen Extrempunkte
(B) einen Wendepunkt
(C) einen Sattelpunkt



… h Angabe … chstaben- … nach:

5

$= \int_c^d f(t)\,dt$

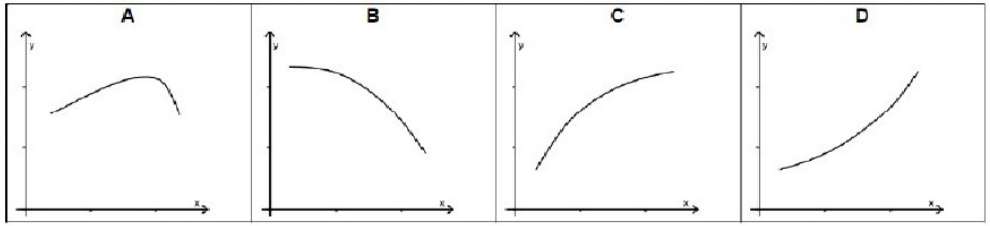


Der Graph zeigt die Zeit-Gesch- … windigkeit-

4

1 Na endlich! Rückgang der Arbeitslosenzahlen beschleunigt sich.	2 Schulentwicklung Dramatischer Rückgang der Schülerzahl	3 Klimakatastrophe Die Durchschnittstemperaturen wachsen immer schneller.	4 Erfreulich! Die Zunahme der Verkehrsunfälle konnte verringert werden

Bringe die Graphiken A,B,C und D in eine Reihenfolge, dass sie zu den Schlagzeilen passen.



… erreicht

(C) ist die Beschleunigung gleich 0.

pinkernell@ph-heidelberg.de

Beherrschen und Verstehen

- Produktives Anwenden von Verfahren durch situationsangemessenes Modifizieren und Reorganisieren von Einzelschritten
- Aufgabenvariation, Rechenstrategien

  vgl. Aebli, 1963, Wittmann 1980, Schipper 2005
- In einem sinnstiftenden Wechseln zwischen begriffstypischen Darstellungen zeigt sich ein verständiger Zugang zum Lerngegenstand

  vgl. Duval 2002

Verfahren im operativen Sinne beherrschen

Grund- und Fehlvorstellungen aktivieren bzw. vermeiden

Repräsentationswechsel durchführen

inner- und außermathematische Anwendungen

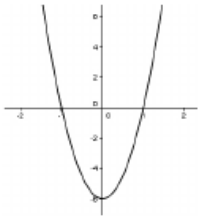
- fachlich angemessene mentale Modelle zu einem Begriff oder Verfahren
- bilden ein Netz an sinngebenden Interpretationen eines Begriffs

  vgl. Blum, Kirsch 1979, vom Hofe 1998
- Verfügbarkeit bei gleichzeitiger Reflexion möglicher Anwendungsbereiche und -beschränkungen
- „Mathematisierungsmuster“ in inner- und außermathematischen Anwendungsbereichen

  vgl Tietze, Klika, Wolpers 1997

pinkernell@ph-heidelberg.de

Beherrschen und Verstehen

Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in innermathematischen Kontexten
7. Monotonieeigenschaften und insb. Extrema von Funktionen bestimmen						
7.1	Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 6x$.	Die Nullstellen von $f'(x) = 6x^2 - 6$ lassen sich schnell als $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ bestimmen. Mit $f''(x) = 12x$ ergeben sich $f''(1) = 12$ und $f''(-1) = -12$, so dass beide Werte x_1 und x_2 als Extremstellen identifiziert sind. Mit $f(1) = -4$ und $f(-1) = 4$ sind die Koordinaten vollständig: $(-1;4)$ ist Hochpunkt, und $(1;-4)$ ist Tiefpunkt des Graphen.	Eine Grundaufgabe bei der Untersuchung von Funktionseigenschaften			Eine innermathematische Anwendung der Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten
7.2	Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f an, für die gilt: f hat bei x_0 kein Maximum und es gilt $f'(x_0) = 0$. Begründen Sie anhand einer Skizze.	Ein Beispiel ist etwa die Funktion f mit $f(x) = x^3$. Die Skizze zeigt den bekannten s-förmigen Graphen von f, der bei $x_0 = 0$ eine waagerechte Tangente aufweist. Es gilt also $f'(0) = 0$. Allerdings liegt hier offensichtlich keine Extremstelle vor.	Eine Aufgabe mit Zielumkehr	Hier ist die Fehlvorstellung angesprochen, dass die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes auch hinreichend sei.		
7.3	Bestimmen Sie die Bereiche, in denen der Graph von $f(x) = 2x^3 - 6x$ monoton fallend ist.	Ein algebraischer Lösungsweg ist nicht nötig. Der Graph von f' mit $f'(x) = 6x^2 - 6$ gibt unmittelbar Auskunft über besondere Monotonieabschnitte:  f fällt monoton zwischen -1 und 1.	Eine Grundaufgabe bei der Untersuchung von Funktionseigenschaften		Eine graphische Analyse der Situation führt zur Lösung	Eine innermathematische Anwendung der Ableitung zur Bestimmung von Monotonieeigenschaften

MNU: Grundwissen und -können – Leitgedanken

Schulperspektive

- orientiert an den inhaltlichen Zielformulierungen der KMK BS „Oberstufe“
- orientiert am Allgemeinbildungsauftrag des gymnasialen Unterrichts
- konzipiert auf Basis etablierter unterrichtsdidaktischer Prinzipien

Beherrschen und Verstehen

Grundlage einer Verständigung über Schnittstellen hinweg

- Verstehen zentraler Begriffe und Verfahren als gemeinsames Anliegen
- Grundlegendes Verstehen zuerst inhaltsorientiert, aber prozesskompatibel

pinkernell@ph-heidelberg.de

… prozesskompatibel

in den
KMK Bildungsstandards OS
unter den Leitideen
z.T. konkretisiert

K5: mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen

- elementare Verfahren, Kalküle,
- AG BaKo:
  - Umgang operativ, auch mit Darstellungen
  - hilfsmittelfrei

Verfahren im operativen Sinne beherrschen

Grund- und Fehlvorstellungen aktivieren bzw. vermeiden

Repräsentationswechsel durchführen

inner- und außermathematische Anwendungen

K4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Standarddarstellungen
- AG BaKo:
  - Repräsentationen von mathematischen Inhalten
  - Repräsentationswechsel (fehlt im Anforderungsbereich I der BS)

K3: Modellieren

- vertraute Modelle
- direkter Übertrag zwischen Realsituation und Modell
- AG BaKo:
  - expliziter Einbezug auch innermathematischer Ausgangssituationen

pinkernell@ph-heidelberg.de

MNU: Grundwissen und -können – Leitgedanken

Schulperspektive

- orientiert an den inhaltlichen Zielformulierungen der KMK BS „Oberstufe“
- orientiert am Allgemeinbildungsauftrag des gymnasialen Unterrichts
- konzipiert auf Basis etablierter unterrichtsdidaktischer Prinzipien

Beherrschen und Verstehen

Grundlage einer Verständigung über Schnittstellen hinweg

- Verstehen zentraler Begriffe und Verfahren als gemeinsames Anliegen
- Grundlegendes Verstehen zuerst inhaltsorientiert, aber prozesskompatibel
- „Intelligentes Wissen“ als Basis für den Kompetenzaufbau

http://tinyurl.com/MNU-WuK-Sek2

pinkernell@ph-heidelberg.de

MNU Themenreihe Bildungsstandards

Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen

Guido Pinkernell, Heidelberg; *Hans-Jürgen Elschenbroich*, Korschenbroich; *Gaby Heintz*, Neuss; *Henning Körner*, Oldenburg; *Hubert Langlotz*, Eisenach; *Andreas Pallack*, Soest

http://tinyurl.com/MNU-WuK-Sek2

pinkernell@ph-heidelberg.de