

Christa KAUNE, Osnabrück

Algorithmische Begriffsbildungen auf der Grundlage elementarer Handlungen
- Vorstellung eines Untersuchungsdesigns

Im Folgenden sollen die theoretischen Überlegungen des vorangegangenen Beitrags dadurch ergänzt werden, daß zunächst eine kritische Analyse der Pilotstudie (von Schwenderling) durchgeführt wird und daran anschließend das Untersuchungsdesign einer neuen Untersuchung vorgestellt wird.

Die Fragestellung, die Lösungsstrategie und das Ergebnis sind bei den konstruktiven bzw. den analytischen Aufgaben gänzlich unterschiedlich, so daß zu deren Lösung verschiedene kognitive Denkstile vermutet werden. Konstruktive Aufgaben sind solche, bei denen zu einer Rechenaufgabe ein passender Algorithmus zu entwickeln ist und anschließend ein Programm für eine Registermaschine. Die Aufgabenstellung einer konstruktiven Aufgabe beginnt immer mit den Worten: "Baue ein Netz, ..." oder "Schreibe ein Programm für die Registermaschine, das folgendes leistet ...". Als Beispiel sei hier die dritte Aufgabe der dritten Untersuchungsstunde genannt: "Schreibe ein Programmwort für die Registermaschine, durch das am Ende der Rechnung das Doppelte von Register 1 in Register 2 steht."

Konstruktive Aufgaben können die Schüler auf der enaktiven Ebene zu lösen versuchen. Mit Hilfe von farbigen Stäbchen, deren Folgen natürliche Zahlen symbolisieren, können die wenigen, für die Registermaschine zur Verfügung stehenden Operationen, handelnd nachvollzogen werden. Ein auf diesem niedrigsten Abstraktionsniveau erarbeiteter Algorithmus kann in der nächsten Stufe der Lösungsspirale unter Verwendung des Baukastens 'Dynamische Labyrinth' auf ein Rechenetz übertragen werden. Wesentlicher Bestandteil des zu bauenden Netzes sind Zählbausteine, mit denen ebenfalls die zur Verfügung stehenden Operationen anschaulich simuliert werden können. In der dritten Stufe übertragen die Schüler die bisherigen Erkenntnisse auf die symbolische Ebene. In dem zuvor gebauten und jetzt gezeichneten Rechenetz wird den 'interessanten Stellen' ein Symbol zugeordnet. Die Aneinanderreihung der Symbole in der richtigen Reihenfolge ergibt ein vollständiges Registermaschinenprogrammwort. Damit ist die vierte Stufe der Spirale erreicht, die der symbolischen Ebene zugeordnet werden kann. Die vorgestellten Stufen sind algorithmisch äquivalent, so daß von den Schülern jeweils der gleiche Algorithmus auf verschiedenen Handlungsebenen erarbeitet wird.

Die eindeutige Unterscheidbarkeit des zweiten Aufgabentyps vom ersten wird daran deutlich, daß die Schüler als Umkehrung des ersten Typs die Aufgabenstellung auf algorithmischer Ebene bekommen, mit dem Ziel, die *Bedeutung des Algorithmus* zu erkennen. *Analytische Aufgaben* beginnen im Normalfall mit folgender Formulierung: "Stelle fest, was durch folgendes Programm berechnet wird ...".

Als Beispiel sei hier die zweite Aufgabe der 3. Untersuchungsstunde ausgewählt:

Stelle fest, was durch folgendes Programm berechnet wird:

$({}_3S_3S_2)({}_2S_2A_1)$, wenn $R_3 = 7$, $R_2 = 12$ und $R_1 = 6$ vorgegeben sind.

Die Lösung dieser analytischen Aufgaben kann ebenfalls auf die enaktive Ebene reduziert werden, indem das gegebene Programmwort mit dem Stäbchenmodell simuliert wird. Dazu ist eine Analyse der hintereinander geschriebenen Symbole notwendig. Als Ergebnis wird die Bedeutung des Algorithmus in die allgemeine Form eines Terms übersetzt, zunächst ausgehend von Beispielzahlen und im nächsten Schritt mit geeigneten Variablen für die Registerinhalte.

Während diese Aufgabe das semantische Verständnis eines vorgegebenen Programmwortes überprüft, gehört zum Bereich der analytischen Aufgaben noch eine weitere Aufgabenart. Diese Aufgaben sollen überprüfen, ob ein Schüler ein syntaktisches Verständnis des Programmwortes hat. Hier sind die Aufgaben gemeint, in denen zu einem gegebenen Registermaschinenprogrammwort ermittelt werden muß, wie lange die Registermaschine für die Berechnung benötigt. Ein Maß dafür ist die Anzahl der Rechenschritte.

Eine Beispielaufgabe für diesen Typ ist die fünfte Aufgabe der vierten Stunde:

Berechne die Anzahl der Rechenschritte für folgendes Programm:

$({}_1S_1({}_2S_2A_3A_4)({}_4S_4A_2))$ Lösung: $x_1 \cdot (1+5x_2)$.

Alle Untersuchungsstunden wurden gefilmt. Die Auswertung erfolgte im Anschluß an die Untersuchung durch Betrachten der Videobänder.

Der Lösungsweg jeder Aufgabe (ob analytischer oder konstruktiver Art) war in Teilschritte zerlegt. Zu jedem dieser Teilschritte stand dem Versuchsleiter eine Hilfe zur Verfügung, die einen Schüler, der Schwierigkeiten hatte, in die Lage versetzen sollte, die Teilaufgabe zu lösen.

Die Reihenfolge der Hilfen war nicht nach einem Schwierigkeitsgrad geordnet, sondern danach, wann die Hilfe während der Lösung benötigt wurde.

Jeder VL erstellte für jede Aufgabe ein Schülerprofil aus dem ersichtlich war, welche Tips benötigt worden waren. Hieraus ergab sich ein Ausdruck für den Leistungsgrad (zu wieviel Prozent ein Schüler eine Aufgabe selbständig gelöst hatte) und durch die Einteilung der Aufgaben in analytische und konstruktive ergab sich eine Klassifizierung der Schüler im Sinne der Fragestellung.

Das *Untersuchungsergebnis* stellt sich wie folgt dar:

Von vierzehn Untersuchungsteilnehmern erbrachten sechs Kandidaten deutlich bessere Leistungen (das bedeutet, die Differenz zwischen den nicht benötig-

ten Hilfen des einen bzw. anderen Aufgabentyps waren größer als 15 Prozentpunkte) in einem der beiden Bereiche. Vier Schüler verdienen davon das Prädikat 'konstruktiver Typ', zwei Schüler das Prädikat 'analytischer Typ'.

Kritische Reflektion der Voruntersuchung

Wir waren von dem Ziel ausgegangen, den Denkprozeß von Schülern durch eine Interaktion zwischen Lehrer und Schüler zu dokumentieren. Offengelegt werden sollte dies durch die gegebenen Hilfen und die Reaktion der Schüler auf die Hilfen.

Die der Untersuchung folgende Auswertung der Bänder ließ Schwachstellen im Design deutlich werden:

1. Die vorgesehenen Hilfen waren lückenhaft.
Die Auswertung der Bänder zeigt, daß in viel größerem Ausmaß Lehrer-Schüler-Gespräche stattgefunden haben, als es anhand der geplanten Hilfen vorgesehen war. Dies bedeutet, daß während der Planung nur ein geringer Teil der tatsächlich aufgetretenen Schwierigkeiten vorhergesehen worden war.
2. Die angebotenen Hilfen führten einige Schüler stark auf einen vorprogrammierten Lösungsweg.
Wie die Auswertung gewisser Bandstellen zeigt, sind einige Schüler auf Ideen (Lösungssätze) gekommen, an die vorher nicht gedacht worden war. Wenn der VL dann eine der geplanten Hilfen gab, wurde der Schüler von seiner Idee abgebracht und auf den geplanten Weg geführt.
3. Die VL zeigten unterschiedliches Verhalten den einzelnen Schülern gegenüber.
In den Zeiträumen zwischen den einzelnen, für die Auswertung zählenden Hilfen gab es Instruktionen durch die VL, die den einzelnen Schülern gegenüber sehr unterschiedlich ausfielen.
4. Alle Hilfen wurden gleichgewichtet.
Die benötigten Hilfen waren ganz unterschiedlicher Art. So gab es z.B.:
 - emotionale Tips, die den Schüler ermuntern sollten, eine Aufgabe zu beginnen;
 - Tips, die Fehler korrigierten;
 - Tips, die Analogien zu anderen bereits gelösten Aufgaben herstellten;
 - Tips, die bereits Gewußtes, aber schon wieder Vergessenes präsent machen sollten.

Alle diese Tips wurden bei der Auswertung gleichgewichtet und aufsummiert.

Die oben genannten Einwände waren Anlaß, das Design für die Hauptuntersuchung zu verändern, um die Untersuchungsqualität zu steigern. Festgehalten werden sollte jedoch an der Entscheidung, zu den einzelnen Aufgaben ein Netz von Hilfen zu konstruieren um aus den gegebenen bzw. nicht erteilten Hilfen den Denkprozeß des Schülers dokumentieren zu können.

Aus diesen Überlegungen lassen sich die folgenden Bedingungen ableiten, die an eine Erteilung der Hilfen gestellt werden:

1. *Bedingung:* Die Hilfen sollen den *Lernprozeß des Schülers* widerspiegeln und nicht den des VL's. Deshalb müssen die unterschiedlichen Lösungsstrategien der Schüler berücksichtigt werden. Die Hilfen dürfen nicht einen vorprogrammierten Lösungsweg erzwingen.

2. *Bedingung*: Die Hilfen sollten eine Diagnose über den Lernprozeß ermöglichen.
3. *Bedingung*: Die einzelnen Hilfen sollen von allen VL und bei allen VP's aus gleichem Anlaß verwendet werden.

Eine zweite Frage, die diskutiert wurde, war: Kann man einen Computer einsetzen, der so programmiert wird, daß er aufgrund eines Reizwortes der Schüler die dazu passende Hilfe sucht und sie dann dem Schüler anzeigt oder ausdrückt?

Dieser Vorschlag wurde aus folgendem Grund verworfen:

Ein Computer kann immer nur nach syntaktischen Gesichtspunkten eine Hilfe auswählen. Ein geschulter Versuchsleiter, der eine Hypothese hat, was im Kopf des Schülers vorgeht, entscheidet aber nach semantischen Gesichtspunkten.

Aus diesen Bedingungen folgte die Entscheidung:

Eine Hilfe hat folgende Form:

(Nummer, Diagnose, Kommentar, Ziel, Formulierung).

Die *Nummer* ermöglicht einen Algorithmus des Helfens, der auf die unterschiedlichen Lösungsstrategien der Schüler Rücksicht nimmt.

Die *Diagnose* ermöglicht eine klare Entscheidungsstruktur des VL während des Versuchs, ob und wie und wann geholfen werden soll.

Der *Kommentar* steuert die Aufmerksamkeit und die Handlung des Versuchsleiters. Dabei handelt es sich meistens um methodische Hinweise.

Das *Ziel* ist unmittelbar mit der Diagnose verbunden. Aus dem Paar Diagnose/Ziel soll sich eindeutig die auszuwählende Hilfe ergeben. Dabei haben die Diagnose und das zu erreichende Ziel Vorrang vor der *Formulierung*.

Durch ein solches System schien es uns möglich, die Hilfen in ihrer Position und Wirksamkeit auf den vermuteten Denkprozeß des Schülers abzustimmen. Es wird weitgehend verhindert, daß vom VL ein Lösungsweg erzwungen wird.

Zusätzlich wurden für die Auswertung noch vorab Stellen im vermuteten Lösungsweg als Diagnosepunkte festgelegt, die einer qualitativen Einschätzung des Lösungsstils dienen.

In der Interaktion zwischen Schüler und VL sowie dem Material gibt es durch den großen Anteil von beobachtbaren Handlungen eine starke Komponente von non-verbaler Kommunikation. Diese läßt sich als eine Weiterentwicklung der von SCHWANK (1979) gemachten Vorschläge zur Verbesserung der Methode des lauten Denkens deuten.

Selbst wenn es auf dem von uns eingeschlagenen Wege gelingt, den Lösungsprozeß eines Schülers annähernd zu dokumentieren, bleibt ein Leistungsvergleich aufgrund der Auszählung der benötigten Hilfen problematisch. Selbstverständlich sind nicht alle Hilfen gleich zu gewichten, aber bei ihrer großen Zahl (bis zu 40 bei einer Aufgabe) ergibt sich ein Ausgleich, der eine grobe Klassifizierung der Leistungshöhe möglich macht.

LITERATUR

- Cohors-Fresenborg, E./ : Dynamische Labyrinth, Osnabrücker Schriften zur
Finke, D./Schütte, S. Mathematik, Reihe U, Hefte 1-9, 1A-9A, 21
Osnabrück 1979a
- Cohors-Fresenborg, E./: Registermaschinen und Funktionen, OSM, Reihe U,
Griep, M./Schwank, I. Heft 22, Osnabrück 1979b
- Cohors-Fresenborg, E./: Registermaschinen und Funktionen, Lehrerhandbuch,
Griep, M. OSM, Reihe U, Heft 25, Osnabrück 1982a
- Cohors-Fresenborg, E.: The understanding of algorithmic concepts on the
basis of elementary actions, In: Proceedings of
the 6th Conference PME, Vermandel, A. (Hrsg.),
Antwerpen 1982b
- Cohors-Fresenborg, E.: Methodologische Überlegungen zur empirischen
Forschung in der Mathematikdidaktik, ZDM 2/1983
- Kling, U.: Kognitive Aspekte bei Mensch/Maschine-Interak-
tionsformen im Bereich des Lernens und Problem-
lösens. In: Ueckert, H./ Rhenius, D. (Hrsg.):
Komplexe menschliche Informationsverarbeitung,
Bern 1979
- Schwank, I.: Limits and possibilities of the method of thinking-
aloud; in: Tall, D. (Hrsg.) Proceedings of the
third International Conference for the Psychology
of Mathematics Education, Warwick 1979
- Schwenderling, W.: Empirische Untersuchungen über die Bildung algo-
rithmischer Begriffe bei Schülern der Mittelstu-
fe des Gymnasiums. Staatsarbeit, Osnabrück 1982
- Stellungnahme der GDM zur Einbeziehung von Inhalten und Methoden der In-
formatik in den Mathematikunterricht, ZDM 1981, S.214