Beschreibung der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die von jedem Abiturienten erwartet werden

> Diese Zusammenstellung umfaßt Kernwissen, auf das keinesfalls verzichtet werden darf. Elementare Fertigkeiten werden mit aufgeführt, weil ohne sie mit anspruchsvolleren Methoden nicht gearbeitet werden kann. Die Aufzählung einzelner Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten darf nicht zu dem Mißverständnis verleiten, daß der Mathematikunterricht bloß aus deren Einübung besteht und sich in der Vermittlung isolierter Wissenselemente erschöpft; vielmehr müssen diese innerhalb sinnvoller Zusammenhänge und Problemstellungen erarbeitet werden.
>
> Die hier zur Verdeutlichung der im Unterricht verfolgten Absichten genannten wenigen Beispiele sind natürlich nicht so gemeint, daß genau diese behandelt werden müssten.

Numerische Techniken

Rechnen mit

> Brüchen (einschließlich Prozentrechnung), auch als Vorbereitung auf die Algebra,
> Dezimalzahlen (einschl. Rundungsfehlerbetrachtung),
> Potenzen (z. B. $\sqrt{1,6 \cdot 10^7} = \sqrt{16 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^3$), sowohl aus praktischen Gründen als auch zur Vorbereitung der Exponentialfunktionen.

Umgang mit Rechenhilfsmitteln

> (Taschenrechner, Rechenstab oder Funktionentafeln),

Sicherheit bei Überschlagsrechnungen.

Einfache Gleichungen und Ungleichungen

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei und drei Variablen ebenso wie das Auflösen einfachr Gleichungen - wie etwa $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ (Linsenformel) oder $s = \frac{1}{2}gt^2$ (beschleunigte Bewegung) - nach jeder darin vorkommenden Variablen.

> Solche Gleichungen müssen auch dann noch sicher und bis zum numerischen Endresultat bearbeitet werden können, wenn die Variablen einmal s und t statt x und y heißen oder wenn dimensionierte Größen vorkommen.

Quadratische Gleichungen

> Wegen der Bedeutung der quadratischen Funktionen kommt es nicht nur auf die Lösungsformel der quadratischen Gleichungen an, sondern ebenso darauf, daß z.B. die Umformung
>
> $$x^2 + 4,8x + 5.35 = (x + 2.4)^2 - 0,41$$
>
> Lage und Größe des Minimums der entsprechenden Funktion zeigt, während man aus der Produktdarstellung
>
> $$(x + 2,4 + \sqrt{0,41})(x + 2,4 - \sqrt{0,41})$$
>
> sieht, wo die Funktion Nullstellen und wo sie positive bzw. negative Werte hat.

Addition und Multiplikation von Ungleichungen, Rechnen mit Beträgen $a^2 < 25 \iff |a| < 5 \iff -5 < a < 5$, einfache Abschätzungen z.B. $2 < \sqrt[3]{16} < 3$ weil $8 < 16 < 27$.

Graphische Darstellungen

Rechentechniken bzw. Lösungsverfahren sollten von Anfang an graphisch veranschaulicht werden (Dreisatz, Interpolation, lineare Gleichungen und Systeme, quadratische Gleichungen).

Eigenschaften graphisch gegebener Funktionen (Weg-Zeit-Diagramme, statistische Beschreibungen, Kostenentwicklungen, Wachstums- und Schwingungskurven, Meßreihen) müssen mit Worten beschrieben und qualitativ diskutiert werden können (z. B. wachsend, immer schwächer wachsend, periodisch schwankend, sich beliebig gut einer Konstanten nähernd, ...). Es ist sehr wichtig, daß man derartige qualitative Aussagen schon frühzeitig und ohne den Begriffsaufwand der Analysis machen kann.

Graphische Darstellungen mit nichtlinearen (z. B. logarithmischen) Skalen, die in Anwendungen häufig auftreten, müssen interpretiert werden können. Dadurch wird auch das Verständnis des Funktionsbegriffs gefördert.

Graphische Darstellungen gehören auch zur Einübung des Umgangs mit Ungleichungen und Absolutbeträgen (z. B. Durchschnitt der Lösungsmengen einfacher Ungleichungen, konvexe Polygone als Lösungsmengen linearer Ungleichungssysteme).

Grundkenntnisse in Geometrie

> Verständnis für mathematische Beweise zu erreichen, ist eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts. Nach den elementaren Teilbarkeitsregeln ist die Mittelstufengeometrie ein anderes günstiges Übungsfeld. Hier wird jedoch nicht einer weitgehend axiomatischen Behandlung das Wort geredet. Man braucht keine explizite Axiomatik, um beispielsweise den Satz von Thales oder Schnittpunktsätze an Parallelogramm und Dreieck aus Symmetrieeigenschaften zu folgern (lokales Ordnen").

Vor Beginn der Oberstufe muß aus der Geometrie folgendes bekannt sein:

Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen als Isometrien der Ebene, Kongruenzsätze, Satzgruppe des Pythagoras, und zwar nicht nur als Aussagen über Flächeninhalte, sondern auch zur Berechnung von Abständen (Grundlage der metrischen analytischen Geometrie). Zentrische Streckungen und Ähnlichkeitssätze. Winkelfunktionen (am Kreis), Sinus- und Kosinussatz. Umfang, Flächeninhalt bzw. Volumen einfacher Figuren, Änderung ihrer Maßzahlen bei zentrischen Streckungen.

> Bei der Behandlung von Umfang und Fläche eines Kreises wird auch der Grenzwertbegriff vorbereitet. Die Betrachtung räumlicher Gebilde ist nicht nur aus praktischen Gründen notwendig; sie dient auch der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Formale Fertigkeiten

> Die früher Buchstabenrechnung, heute Termumformungen genannten notwendigen Techniken erfordern ausreichende Übung. Das Hantieren mit den oben angeführten einfachen Gleichungen darf nicht durch einen aufgeblähten Begriffsapparat (etwa mit rekursiver Definition von Termen") erschwert werden. Das notwendige Ausmaß dieser formalen Fertigkeiten läßt sich nicht genau beschreiben; ein wesentliches Kriterium dafür ist aber jedenfalls, daß begriffliche Schwierigkeiten des Oberstufenstoffes nicht durch mangelnde Rechenfertigkeiten vergrößert werden dürfen.

Außer den bisher genannten einfachen Gleichungen muß ein Abiturient z. B. die folgenden Formeln (in ihrem Gültigkeitsbereich) beweisen und in beiden Richtungen zielstrebig für Umformungen benutzen können:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Solche Zerlegungen werden später, etwa beim Differenzieren der Funktion $x \mapsto x^3$ benutzt. Bei größeren Exponenten ist die geometrische Reihe nützlich:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)a^n(1 + \frac{b}{a} + \frac{b}{a}^2 + \ldots + \frac{b}{a}^n)$$

> Ihre Bedeutung kann nicht genügend betont werden; man denke etwa an Verzinsung, periodische Dezimalbrüche, Vorbereitung des Grenzwertbegriffs, Iterationsverfahren in der Analysis, usw.

Die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist wohl jedem Schüler bekannt, er sollte jedoch auch Überschlagsrechnungen wie

$$1,03^2 \cong 1,06, \text{also} \sqrt{1,06} \cong 1,03$$

als Anwendung davon erkennen ($a >> b$).

Eine Formel wie $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ sollte auch in der Gestalt

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

benutzt werden können, etwa beim Differenzieren der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$. Wichtige Eigenschaften der elementaren transzendenten Funktionen müßen geläufig sein, z. B.

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$
$$x < y \implies a^x < a^y \text{ für } a > 1,$$
$$\log x + \log y = \log(xy),$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

> Dazu ist keine vollständige theoretische Behandlung dieser Funktionen erforderlich. Plausibilitätsargumente haben auch hier ihren Sinn, und es ist - wie in der Wissenschaft überhaupt - legitim und manchmal unumgänglich, Sachverhalte ohne Beweis mitzuteilen.

Lineare Algebra und Geometrie

Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist eine Grundtechnik, die Abiturienten sicher beherrschen müssen. Linearkombinationen spielen in allen Anwendungen der linearen Algebra eine entscheidende Rolle, sie sollten schon in der Gleichungslehre betont werden (als eine Hinführung zum Begriff des Vektorraums). Zur Behandlung der Gleichungssysteme gehört deren geometrische Interpretation in Ebene und Raum, einerseits um eine anschauliche Vorstellung der Lösungsmengen zu geben, andererseits weil die analytische Beschreibung der Geometrie des Raumes (nicht nur der Ebene) ein selbständiges Unterrichtsziel ist. Dabei ist die geometrische Interpretation der Vektoren wichtig, die ja auch zu einem besseren Verständnis der Vektorrechnung beiträgt - jedoch ohne daß dadurch der Vektorbegriff einseitig auf gerichtete Strecken oder Pfeilklassen fixiert werden sollte.

Der Zusammenhang zwischen der Metrik des Raumes und dem Satz des Phythagoras muß selbstverständlich bekannt sein. Bei der Lösung metrischer Aufgaben sollen sowohl die Linearitätseigenschaften des Skalarproduktes wie dessen geometrische Interpretation (Kosinussatz) verfügbar sein.

Schließlich sollte aus der analytischen Geometrie bekannt sein, daß die einfache lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (ax, by)$ z. B. den Einheitskreis auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{y^2} = 1$ abbildet. Beziehungen zwischen Geometrie und Analysis müssen hergestellt werden können.

> Beispiele: Die Ellipse in der Beschreibung als Kurve $t \mapsto a \cos t + b \sin t$ eignet sich zur Diskussion des Tangentenproblems in Geometrie und Analysis; oder: Nachweis geometrischer Eigenschaften der Graphen einfacher Funktionen, etwa Brennpunkt der Parabel $x \mapsto x^2$, Tangenten und Asymptoten der Hyperbel $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Analysis

Die wichtigste Aufgabe der Differentialrechnung ist es, den Begriff der Ableitung einzuführen und den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung klarzumachen. Das bedeutet nicht, daß schon zum Zeichnen des Graphen einfacher Funktionen $(x \mapsto (x-a)^2 + b, x \mapsto mx + \frac{1}{x}, x \mapsto \sqrt{1+x}$ die Differentialrechnung bemüht werden muß, im Gegenteil, derartige Funktionen müssen vor dem Differenzieren bekannt sein (z. B. aus der Gleichungslehre) oder bei der Entwicklung der Ableitungsdefinition bekannt gemacht werden, damit der Zusammenhang zwischen f und f' an ihnen erläutert werden kann. Die Definition der Ableitung allgemeinerer Funktionen ist eng mit dem Grenzwertbegriff (für Folgen oder Funktionen) verbunden; für die genannten einfachen Funktionen führen jedoch bereits elementare Überlegungen zu einer eindeutigen Tangentendefinition, so daß auf diese Weise intuitive Grenzwertvorstellungen entwickelt werden können. Das Newtonverfahren, angewandt auf diese einfachen Funktionen, demonstriert die Nützlichkeit der Tangenten und ihre Approximationseigenschaft. Auch hier werden außer den numerischen Aspekten der Analysis intuitive Grenzwertvorstellungen geschult. Unabhängig davon, wieviel Zeit auf die Grundlegung der Analysis verwandt werden kann, müssen jedenfalls die Differentiationsregeln (Linearität, d. h. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel) und die Ableitung der rationalen Funktionen sowie der speziellen Funktionen $x \mapsto \sqrt{x}, \sin, \cos, \exp, \ln$ sicher beherrscht werden. Damit werden nicht Beweise all dieser Tatsachen gefordert, sie müssen jedoch wenigstens durch mathematische Plausibilitätsargumente verständlich gemacht werden. Dafür zwei Beispiele:

> Die Sehnensteigung der Exponenialfunktion $x \mapsto 2^x$ ist im Intervall $[x, x+h]$ bei festem h proportional zu 2^x, nämlich
>
> $$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \cdot \frac{2^h - 1}{h}.$$
>
> Daher ist plausibel, daß auch die Tangentensteigung bei x proportional zu 2^x ist.
>
> Oder zur Kettenregel: Verkettung der affinen Funktionen
>
> $$l_i(x) = a_i + m_i \cdot x \text{für} i = 1, 2$$
>
> zeigt, daß die affine Funktion
>
> $$l_2 \circ l_1(x) = (a_1 + m_2 a_2) + m_1 m_2 x$$
>
> die Steigung so ist es plausibel, daß sich beim Verketten differenzierbarer Funktionen die Steigungen (genommen an den richtigen Stellen) multiplizieren:
>
> $$(f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x).$$

Auch hier ist es also wichtig, daß mathematische Tatsachen ohne ihren vollständigen Beweis verständlich gemacht werden können.

> Das Verständnis des Zusammenhangs zwischen f und f' wird gefördert durch die Interpretation von f' als Geschwindigkeit, von f'/f als Wachstumsrate; zeigt sich z. B. bei der Diskussion graphisch gegebener Funktionen (genauer als in der Mittelstufe - etwa: zu einer gegebenen Funktion f sind Funktionen zu skizzieren, die ungefähr wie die Ableitung bzw. wie eine Stammfunktion von f aussehen); besitzt als quantitative Grundlage den Schrankensatz: Ist f differenzierbar und gilt
>
> $$m \leq f'(x) \leq M \text{fürallex} \in \text{[a, b]}$$
>
> so ist
>
> $$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Als unmittelbare Anwendung müssen Extremwertaufgaben aus Geometrie, Physik oder Wirtschaftswissenschaften gelöst werden können.

Auch die Grundzüge der Integralrechnung gehören zum Kern des Mathematikunterrichts. Ihre Behandlung wird zeitlich möglich, wenn die Differentialrechnung in der skizzierten Weise konzentriert wird. Ein

Teil der Integralrechnung ist Folge des Schrankensatzes. Stammfunktionen F zu f (d.h. $F' = f$) sind bis auf eine additive Konstante bestimmt (denn $F' = 0$ impliziert $F = const.$).

Anwendungsbeispiele: Die Wachstumsrate $\alpha = \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}$ impliziert das Wachstumsgesetz

$$f(t) = f(0) \cdot e^{\alpha t}$$

Anfangspunkt $f(0) = 0$, Anfangsgeschwindigkeit $v = \dot{f}(0)$ und konstante Beschleunigung $-g = \ddot{f}(t)$ ergeben das Bewegungsgesetz $f(t) = v \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.

Ferner betrifft die Integralrechnung den wichtigen Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Flächeninhalt. Dieser Zusammenhang, für den es ja überzeugende Plausibilitätsargumente gibt, sollte keinem Abiturienten vorenthalten werden.

Diese Inhalte sind nicht austauschbar und nicht abwählbar. Sie sind größtenteils klassisch; unmodern jedoch können niemals Inhalte, sondern nur Betrachtungsweisen sein. Die hier geschilderten Betrachtungsweisen verhindern, daß die Forderung nach ständiger Verfügbarkeit elementarer Kenntnisüse zu gedankenlosem Drill führt. Unterricht braucht nicht unexakt zu sein, wenn er Beweislücken läßt, und er ist nicht notwendig unwissenschaftlich, wenn er zeigt, daß Mathematik nützlich und interessant ist.

Forderungen, die überall erfüllt sind, brauchen nicht erhoben zu werden. Die vorliegenden Forderungen sind nicht erfüllt, obgleich sie - noch - von manchen Richtlinien gedeckt werden. Offenbar ist ein Umdenken in Schule, Schulbüchern und Schulplanung, sind Verbesserungen in der Lehrer-Ausbildung und -Fortbildung notwendig, damit der Mathematikunterricht das hier formulierte Kernwissen vermitteln kann.

Professor Dr. Heinz Bauer
Vorsitzender der DMV
Mathematisches Institut der
Universität

852 Erlangen