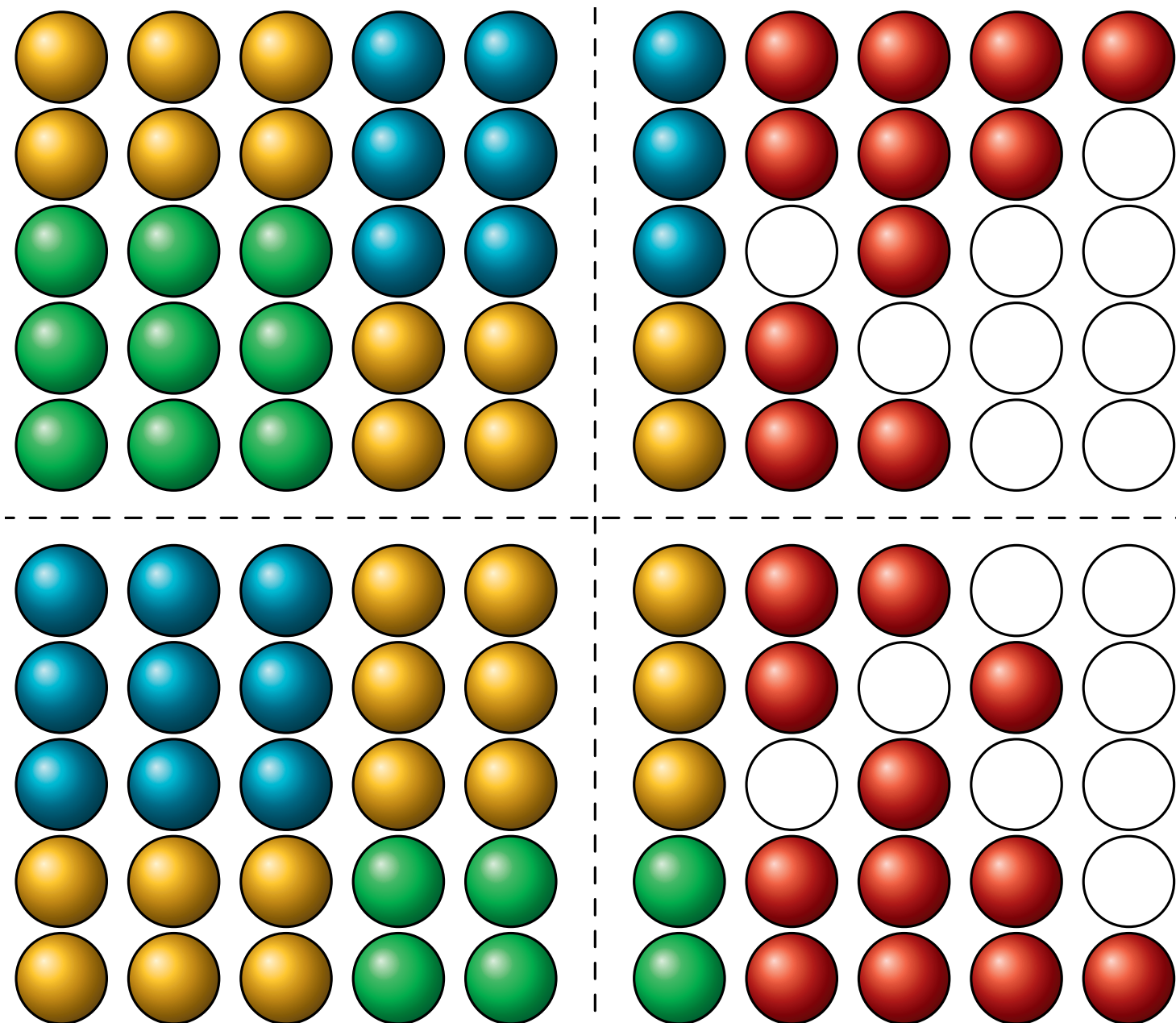


MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK



100

Februar 2016

Editorial: 10 × 10

Liebe Lesende,

beginnen wir zunächst mit dem Offensichtlichen: Ich habe mir erlaubt, für Heft 100 von dem mit Beginn meiner Schriftführerschaft neu eingeführten Titelbild abzuweichen. Den Titel schmückt bzw. verunstaltet gewissermaßen ein auf eine Auflösung von 10 × 10 Pixeln reduzierte und zum Hunderterfeld mutierte Variante des gewohnten Titels – was nicht an Bildrechten liegt, die Timo Leuders im Diskussionsteil dieses Heftes thematisiert.

Womit wir auch gleich wieder bei der Rubrik „Diskussion“ sind, die auch im aktuellen Heft recht umfangreich ausgefallen ist. Wer von Ihnen parallel auch die *Mitteilungen der DMV* verfolgt, wird bemerkt haben, dass einige Diskussionsstränge rund um Zentralabitur, Standards und Kompetenzorientierung sich über beide Verbände und damit auch über beide Mitteilungsblätter erstrecken.

Im aktuellen Heft kommt es (für diejenigen die beide Heftreihen verfolgen) dabei insofern zu einer Doppelung, als wir ein Interview mit Vertretern der gemeinsamen Kommission „Übergang Schule – Hochschule“, das maßgeblich ebendiesen Bereich betrifft, auf ausdrücklichen Wunsch der Kommissionsmitglieder in beiden Organen abdrucken.

Mit Heft 100 endet auch meine zweite Periode als Schriftführer (also mindestens meine vorletzte Periode). Da habe ich es mir nicht nehmen lassen, es meinem Vorgänger gleich zu tun und auch einmal persönlich einen Beitrag zu oben genannter Rubrik zu liefern. Von diesem Text kann ich mich dann auch ausnahmsweise einmal nicht inhaltlich mit Verweis auf die nicht notwendige Übereinstim-

mung von Herausgeber- und Autorenmeinung distanzieren¹, wohl aber darauf hinweisen, dass es sich dabei um meine persönliche Meinungsbekundung, nicht um eine irgendwie abgestimmte Vorstandsposition handelt.

Neben der bisweilen hitzigen Diskussion soll natürlich auch in diesem Heft das Feierliche nicht zu kurz kommen und auf das Titelbild beschränkt bleiben. Neben 100 Heften Mitteilungen können wir u. a. stolze 25 Jahre ISTRON-Gruppe feiern und sehen uns dann hoffentlich persönlich auf der 50. Jahrestagung in Heidelberg. Herzlich gratulieren können wir zudem zwei weiteren ICMI-Medallengewinnern/innen (Jill Adler und Alan Bishop) im Rahmen des ICME-13 im Juli in Hamburg, über die ich Sie ja in Abwesenheit des Ersten Vorsitzenden schon im Auftrag von Gabriele Kaiser in einer ganzen Serie von Rundmails informieren durfte. Über den aktuellen Stand zur ICME-13 berichtet dann im vorliegenden Heft wieder der Erste Vorsitzende höchstpersönlich. Über die Aktivitäten der Arbeitskreise informieren diese wie gehabt ihrerseits im Rahmen der Berichte über die Herbsttagungen.

Ihnen nun eine anregende Lektüre wünscht
Andreas Vohns

P.S.: Dass die Seitenzahlen des Innenteils in Summe mit den Umschlagseiten ebenfalls genau 100 ergeben, ist angesichts des Jubiläums schön, aber eher dem Zufall geschuldet bzw. dem Umstand, dass durch acht teilbare Seitenzahlen für den Druck von Vorteil sind.

¹ Ein fast schon durchlaufender Posten für MGDM-Editoriale und – welche Überraschung – parallel auch in Heft 4/2015 der Mitteilungen der DMV enthalten.

Inhalt

- 1 Editorial: 10×10
 4 Vorwort des ersten Vorsitzenden

Magazin

- 6 *Peter Baumann und Thomas Kirski*
 Analysis mit hyperreellen Zahlen
 16 *Renate Motzer*
 Mathematische Beliefs bei Schüler/innen und Lehramtsstudierenden – Entwicklungstendenzen in den letzten 15 Jahren
 19 *Gilbert Greefrath, Hans-Stefan Siller und Werner Blum*
 25 Jahre ISTRON – 25 Jahre Arbeit für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht
 22 *Jürgen Maaß*
 Eine Lobby für besseren Mathematikunterricht in Österreich – Erinnerungen an die Gründung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich

Diskussion

- 24 *Wolf-Rüdiger Wagner*
 Medialitätsbewusstsein als Ziel von Medienbildung
 30 *Wolfgang Kühnel und Hans-Jürgen Bandelt*
 Schöne neue Mathewelt der österreichischen Zentralmatura 2015
 35 *Andreas Vohns*
 Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts
 42 *Timo Leuders*
 Publizieren für die Praxis – Herausforderungen bei der Rechtesicherheit
 45 *Hans-Georg Weigand*
 Was heißt und zu welchem Ende studiert man Didaktik der Mathematik? Versuch einer Antwort zwischen philosophisch-literarischen Assoziationen und der Gegenwartsrealität
 48 *Gert Schubring*
 Einige Antworten zu Repliken zur Stoffdidaktik
 50 *Erich Ch. Wittmann*
 Ein Vorschlag zur Güte
 51 *Horst Hischer*
 (Mathematisches) Modellieren als Axiomatisieren – eine ungewohnte Sichtweise?

Aktivitäten

- 56 Einladung zur Mitgliederversammlung der GDM – Pädagogische Hochschule Heidelberg, 10. 3. 2016
 57 *Stephanie Schiemann*
 Interview mit Hans-Jürgen Elschenbroich, Gilbert Greefrath und Wolfram Koepf – Mathematik-Kommission Übergang Schule–Hochschule
 63 *Kerstin Hein und Lara Vanflorep*
 GDM Summerschool 2015 in Brinkum
 64 *Sebastian Schorcht, Raja Herold, Ulrike Siebert und Stefanie Rach*
 Bericht zum Herbsttreffen der Nachwuchsvertretung

Arbeitskreise

- 67 *Renate Motzer*
Arbeitskreis Frauen und Mathematik
- 69 *Claudia Lack*
Arbeitskreis Grundschule
- 70 *Birgit Brandt und Frank Förster*
Arbeitskreis Interpretative Forschung
- 72 *Jürgen Roth, Katja Lengnink und Ann-Katrin Brüning*
Lehr-Lern-Labore Mathematik
- 75 *Guido Pinkernell*
Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik
- 76 *Evelyn Süß-Stepancik*
Arbeitskreis Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich
- 78 *Benjamin Rott und Ana Kuzle*
Arbeitskreis Problemlösen
- 80 *Anke Lindmeier*
Arbeitskreis Psychologie und Mathematikdidaktik
- 84 *Gabriella Ambrus*
Arbeitskreis Ungarn

Tagungseinladungen

- 87 *Guido Pinkernell*
Einladung zur 50. Jahrestagung der GDM 2016 in Heidelberg

Rezensionen

- 88 *Rezensiert von Thomas Jahnke*
Horst Hischer: Die drei klassischen Probleme der Antike
- 90 *Rezensiert von David Kollosche*
Sasha la-Bastide-van Gemert: All Positive Action Starts with Criticism: Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics

Personalia

- 93 *Ferdinando Arzaello und Lena Koch*
Felix Klein and Hans Freudenthal Awards 2015
- 95 *Stefan Deschauer*
Nachruf auf Gerhard König
- 96 Hinweise für Autor(inn)en
- 96 Die GDM/Impressum

Vorwort des ersten Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder,

nach jahrelangen Planungen und intensiven Vorarbeiten ist es nun so weit: Die ICME-13 steht vor der Tür. Ich möchte daher dieses Vorwort nutzen, um auch von dieser Stelle auf die Bedeutung dieses großen Ereignisses hinzuweisen, einige aktuelle Informationen hierzu zu geben und darauf aufmerksam zu machen, dass auch jetzt noch eine Anmeldung möglich ist.

13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13)

In Juli dieses Jahres, genauer vom 24.7. bis 31.7.2016, findet in Hamburg verantwortet von der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) ein mathematikdidaktisches Großereignis statt, nämlich der 13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13). Erwartet werden über 3000 Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker aus aller Welt, davon ca. 800 aus dem deutschsprachigen Raum.

Bereits jetzt möchte ich mich im Namen der GDM bei Gabriele Kaiser bedanken, die sich seit vielen Jahren in bewundernswerter Weise mit Geschick, Energie, Pragmatismus und Zuversicht um die Vorbereitungen kümmert. Weiterhin möchte ich den vielen GDM-Mitgliedern danken, die ebenfalls seit Jahren in unterschiedlichen Funktionen an der Vorbereitung der Tagung arbeiten. Und schließlich möchte ich ganz herzlich auch allen Mitgliedern der GDM danken, die sich zu einer mehrjährigen Sonderzahlung bereit erklärt und damit einen wichtigen Beitrag zur Anfangsfinanzierung der ICME-geleistet haben.

Bereits einmal hat die deutschsprachige Mathematikdidaktik eine Tagung dieser Kongressreihe durchgeführt, ICME-3 1976 in Karlsruhe, damals geleitet von Hans-Georg Steiner und Heinz Künle. Deutschland ist damit das erste Land, in dem diese Konferenzreihe ein zweites Mal stattfindet, was als internationale Anerkennung des Wirkens der deutschsprachigen Mathematikdidaktik angesehen werden kann.

Inhaltlich zielt der 13th International Congress on Mathematical Education auf die Diskussion aller relevanten Themengebiete, die sich mit dem Lehren und Lernen von Mathematik befassen. Da die gesellschaftlichen Rahmenbedingungen für

den Mathematikunterricht weltweit sehr verschieden sind, stellt dies ein komplexes Unterfangen dar. Der Anspruch ist, dass Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler von jedem Kontinent und aus jedem Land mit ihren jeweils spezifischen Fragen zum Lehren und Lernen von Mathematik von dem Kongress profitieren sollen.

Die Inhalte der Vorträge und Aktivitäten sind einerseits organisiert entlang der Stoffgebiete der Mathematikdidaktik wie Didaktik der Arithmetik, der Geometrie, der Algebra, der Analysis oder der Stochastik, andererseits sind die Themen entlang der Altersstufen – Vorschule, Grundschule, Sekundarstufe I und II, Tertiärbereich – organisiert, also z. B. Early Algebra als Algebraunterricht in der Grundschule neben Algebra in den Sekundarstufen. Daneben gibt es zahlreiche Gruppen, die themenübergreifend angelegt sind wie Computereinsatz im Mathematikunterricht (differenziert nach drei Altersstufen), Problemlösen im Mathematikunterricht, Mathematisches Modellieren, Lehrerprofessionswissen, Lehreraus- und -fortbildung. Diese Themen werden intensiv in thematischen Arbeitsgruppen, den sog. Topic Study Groups (TSG), behandelt, von denen es 54 gibt. Die deutschsprachige Mathematikdidaktik ist im fünfköpfigen Leitungsteam jeder dieser Gruppen mit einem Mitglied vertreten. Diese Gruppen sollen eine während des Kongresses stattfindende intensive Diskussion der mathematikdidaktisch bedeutsamen Themengebiete ermöglichen und den Erkenntnisprozess innerhalb der internationalen Mathematikdidaktik vorantreiben.

Neben diesen thematisch orientierten Gruppen gibt es eine Fülle weiterer Aktivitäten, die Spezialinteressen fokussieren wie Workshops zur Behandlung von Inhalten der Diskreten Mathematik in der Schule, schulnahe geometrische Aktivitäten, Discussion Groups zur Messung von Lehrkompetenzen oder zu videobasierter Forschung. Insgesamt wird es 47 Workshops und 43 Discussion Groups geben.

Auch die vier Hauptvorträge bzw. zwei Podiumsdiskussionen werden zentrale Themen der Mathematikdidaktik fokussieren. Die deutschsprachige Community wird hierbei durch Günter M. Ziegler vertreten, der einen Vortrag zum Thema "What is Mathematics? – And why we should ask, where one should learn that, and who can teach it" halten wird und damit die engen Beziehungen der GDM zur DMV, die bei der Einwerbung des Kon-

gresses von zentraler Bedeutung war, verdeutlicht. Neben den Hauptvorträgen gibt es sogenannte *invited lectures*, in denen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus aller Welt den Stand der Diskussion zu spezifischen Themen darstellen.

Um eine Nachhaltigkeit der wissenschaftlichen Erkenntnisse von ICME-13 zu fördern, wurde mit dem Springer Verlag ein umfangreiches Publikationsprogramm vereinbart. Aus den thematisch orientierten Gruppen sollen bereits vor der Konferenz sog. ICME-13 Topical Surveys publiziert werden, die jeweils den Stand der Diskussion in diesem Bereich darstellen und mit Open Access verfügbar sein werden. Nach der Konferenz sollen neben den üblichen Konferenzproceedings Monographien aus den präsentierten Beiträgen entstehen.

Bei diesen Aktivitäten wurde auf eine starke geographische Streuung sowie auch auf eine geschlechtermäßige Balance geachtet, wobei es allerdings bzgl. der geographischen Balance ein gewisses Schwergewicht von europäischen und nordamerikanischen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern gibt, insbesondere Afrika war bisher kaum vertreten, dem soll durch ein spezielles Förderprogramm entgegen gewirkt werden.

ICME-13 ermöglicht die Realisierung eines der wichtigsten Ziele der internationalen Mathematikdidaktik, nämlich ein Forum darzustellen für eine verstärkte Reflexion und Zusammenarbeit sowie zum Austausch und zur Verbreitung von Erfahrungen und Ideen zum Lehren und Lernen von Mathematik in allen Schulstufen und darüber hinaus in allen Altersstufen. Dabei sollen Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus allen Ländern unabhängig von ihrer wirtschaftlichen Situation an dieser Tagung teilnehmen können. Insbesondere Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker aus ökonomisch weniger starken Regionen, wie z. B. Afrika oder auch aus gewissen Teilen Asiens bzw. Südamerikas, benötigen finanzielle Hilfe, um an ICME-13 teilnehmen zu können. Dies wurde durch eine breite Sponsoring-Aktivität, bei der u. a. das BMBF und die Bosch-Stiftung aktiv wurden, ermöglicht. Die Bosch-Stiftung hat explizit zur Förderung von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern aus Afrika Geld bereitgestellt, die es vielen Betroffenen erlauben wird, an ICME-13 teilzunehmen.

Neben diesen Aktivitäten bietet ICME-13 ein besonderes Angebot für Lehrkräfte, eine Lehrertagung, die an drei Tagen stattfindet und eine Fülle interessanter Vorträge und Workshops anbieten wird, und zwar ausschließlich in deutscher Sprache. Dabei wird es auch einen populärwissenschaftlichen Vortrag von Günter M. Ziegler geben, der sich an die interessierte Öffentlichkeit wendet. Damit soll eine Brücke von der Wissenschaft zur

Schule geschlagen werden und wissenschaftliche Erkenntnisse sollen Ansätze zur Veränderung der deutschen Schullandschaft ermöglichen. Diese Tagung wird als Lehrerfortbildung anerkannt und ist bundesweit beworben worden.

Neben diesen spezifischen Aktivitäten zur Verbindung von Schulpraxis und Wissenschaft wird es aufgrund der hohen Bedeutung von sog. *Early Career Researcher* ein spezifisches Angebot direkt vor Beginn der eigentlichen Konferenz geben, in dem an einem Tag zu Fragen empirischer Forschungsmethoden, zu zentralen Themen der Mathematikdidaktik sowie über wissenschaftliches Schreiben und Publizieren gearbeitet wird. Die Herausgeberinnen und Herausgeber der zentralen mathematikdidaktischen Zeitschriften haben ihre Teilnahme an diesem Tag zugesagt.

Insgesamt ist der Mathematikunterricht weltweit in Bewegung: Mathematik als Schlüssel für Bildung und technologische Entwicklung ist aus der Schule, Universität und Erwachsenenbildung nicht mehr wegzudenken. Dabei sollen auf ICME-13 die aktuellen Defizite des mathematischen Lernens auf allen Stufen diskutiert werden, die langfristig behoben werden müssen, um die zentralen Ziele eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zu erreichen.

Es gibt also viele Gründe, an der ICME-13 teilzunehmen, neben allen inhaltlichen Gründen auch die Kürze der Reisestrecke und die Attraktivität der Stadt Hamburg. Für viele GDM-Mitglieder ist diese Tagung bereits seit langem ein fest gesetzter Termin. Aber auch für Spätentschlossene gibt es noch die Möglichkeit einer Teilnahme: *Early bird registration* ist noch bis zum 31. März, *Regular registration* bis zum 31. Mai möglich.

Ich wünsche allen an der Vorbereitung Beteiligten viel Glück und Durchhaltevermögen auch auf der letzten Etappe und freue mich bereits jetzt auf eine für uns alle erfolgreiche und interessante Tagung!

Mit freundlichen Grüßen

Rudolf vom Hofe
(1. Vorsitzender der GDM)

Analysis mit hyperreellen Zahlen

Peter Baumann und Thomas Kirski

Hyperreelle Zahlen werden seit Jahrzehnten erfolgreich im Schulunterricht eingesetzt. Sie haben mehrere entscheidende didaktische Vorteile: Hyperreelle – insbesondere infinitesimale – Zahlen kommen den intuitiven Vorstellungen vieler Lernender entgegen. Der für viele Lernende schwierige Grenzwertbegriff entfällt. Hyperreelle Zahlen stellen ein produktives Werkzeug dar – Regeln können errechnet werden (und müssen nicht erst erraten und dann bewiesen werden). Hyperreelle Zahlen knüpfen direkt an die historischen Wurzeln der Entstehung der Analysis an.

1 Einleitung

Manches von dem, was auf den folgenden Seiten steht, erscheint auf den ersten Blick nicht neu, denn das Berechnen von Ableitungen und Stammfunktionen ist wohl jedem bekannt. Der Unterschied zur Standardvorgehensweise im Analysisunterricht liegt in den Begründungen: Anstelle des Prozesses der Grenzwertbildung wird hier stets mit konkreten Zahlen gerechnet. Dazu gehören insbesondere infinitesimale und infinite Zahlen, die betragsmäßig unendlich klein bzw. unendlich groß sind.

Die „Väter der Analysis“ wie Leibniz, Newton und Euler benutzten solche infiniten und infinitesimalen Zahlen, haben intuitiv richtig mit ihnen gerechnet und kamen zu den bekannten Ergebnissen. Jedoch gelang es ihnen nicht, die Zahlen widerspruchsfrei zu erklären. Seit jedoch Abraham Robinson in den 1960er Jahren das erste Modell einer Nichtstandardanalysis entwickelt hat, ist deren Verwendung fachlich abgesichert.

Robinsons Nachweis selbst kann nicht Inhalt der Schulmathematik sein, aber Schüler haben ein erstaunlich gutes Gefühl für diese Zahlen und das Rechnen mit ihnen, wie zum Beispiel die Dissertation von Hauke Friedrich [4] gezeigt hat. Dagegen weiß jede Mathematiklehrkraft aus eigener Erfahrung, wie schwer es ist, Schülerinnen und Schülern den komplexen Prozess des Grenzübergangs nahezubringen, der jedoch schnell wieder vergessen wird, da am Ende der Überlegungen vergleichsweise einfache Regeln stehen.

In zahlreichen neuen Lehrplänen, sogar im Leistungskurs, wird aus Gründen der Zeitökonomie übrigens nur noch verlangt, einen „intuitiven Grenzwertbegriff“ zu unterrichten, wobei allerdings offen bleibt, was damit gemeint sein soll. Überhaupt scheint es angesichts der Verkürzung der Schulzeit eine Tendenz zu geben, auf Begründungen zu verzichten. Dagegen finden wir, dass im Mathematikunterricht – und nicht nur dort – Begründen gelernt werden muss, um studierfähig zu werden. Genau das bietet nun die Analysis mit hyperreellen Zahlen. Um es klar zu sagen: Der Grenzwertbegriff ist für die Schule ungeeignet, er war schon immer zu schwierig.

Manche Lehrkraft wird sich fragen, wie Studierende der Mathematik, die in der Schule Analysis mit hyperreellen Zahlen gelernt haben, damit an der Universität klar kommen, wenn dort Grenzwert-Analysis betrieben wird. Alle bisherigen Rückmeldungen haben klar gezeigt, dass dies kein Problem darstellt. Sie arbeiten dort üblicherweise weiter mit hyperreellen Zahlen und übersetzen notfalls die Begründungen in die Limes-Schreibweise, denn die Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen entsprechen denen für den reellen Teil einer hyperreellen Zahl (s. u.).

Die folgenden Abschnitte zeigen beispielhaft, wie man die Analysis als „echte“ Infinitesimalrechnung betreiben kann. Der Kalkül ist dabei oft der von der Grenzwertanalyse her vertraute, nur seine Begründung unterscheidet sich klar vom Bisherigen. Neu und vorteilhaft ist dabei, und das geht sogar über die Schulmathematik hinaus, dass man bei der Infinitesimalrechnung die Regeln tatsächlich *errechnet*. Bei der Grenzwert-Analysis ist es dagegen häufig notwendig, diese Regeln zunächst zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzübergang zu bestätigen.

Bevor die klassischen Themen der Analysis im Fokus stehen, wird im folgenden Abschnitt zunächst darauf eingegangen, wie die Rechenergebnisse aussehen, wenn die verschiedenen Typen hyperreeller Zahlen miteinander verknüpft werden. Hinweise zu möglichen konstruktiven Wegen der Zahlbereichserweiterung werden im letzten Abschnitt gegeben.¹

¹ Möglichkeiten der Umsetzung im Schulunterricht findet man in unserem Buch *Analysis als Infinitesimalrechnung* [3].

2 Die hyperreellen Zahlen

In seinem Buch *Non-standard Analysis* [11] hat Abraham Robinson im Jahr 1966 gezeigt, dass der Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} zu einem geordneten Körper erweitert werden kann, der als zusätzliche Elemente insbesondere *infinite* und *infinitesimal*² Zahlen enthält. In der Literatur wird meistens wie bei Robinson ${}^*\mathbb{R}$ als Bezeichnung für diesen Erweiterungskörper verwendet, und seine Elemente werden heute im Allgemeinen als hyperreelle Zahlen bezeichnet³. Aus didaktischen Gründen verwenden wir für die Menge der hyperreellen Zahlen den Buchstaben \mathbb{H} .

Mit hyperreellen Zahlen lassen sich die Begriffe der Differenzial- und Integralrechnung ohne Grenzwerte definieren. Die lange als unumstößlich betrachtete Ansicht des Aristoteles, das Unendliche könne nur als *potentiell unendlich*, aber nicht als *aktuell unendlich* gedacht werden, ist damit überwunden, denn mit hyperreellen Zahlen kann man genau so rechnen wie mit reellen. In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe im Zusammenhang mit hyperreellen Zahlen erklärt und der Umgang mit ihnen dargestellt.

Innerhalb der Zahlenmenge \mathbb{H} lassen sich drei verschiedene Zahltypen unterscheiden: Infinitesimale, infinite und finite Zahlen [11].

Die *infinitesimalen* Zahlen sind dem Betrage nach kleiner als jede positive reelle Zahl. Die Zahl Null ist demnach die einzige infinitesimale Zahl, die gleichzeitig eine reelle Zahl ist. Die übrigen infinitesimalen Zahlen sind von Null verschieden und nicht reell. Um bei der Darstellung hyperreeller Terme schon im Schriftbild erkennen zu können, dass eine infinitesimale Zahl gemeint sein soll, werden dafür häufig griechische Kleinbuchstaben ($\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$) verwendet. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{H}$, deren Differenz $a - b$ infinitesimal ist, werden *infinitesimal benachbart* genannt, geschrieben $a \simeq b$.

Die *infiniten* Zahlen sind dem Betrage nach größer als jede positive reelle Zahl. Eine hyperreelle Zahl x ist genau dann infinit, wenn x^{-1} infinitesimal (und $\neq 0$) ist. Um infinite Zahlen schon im Schriftbild erkennen zu können, werden dafür entsprechend griechische Großbuchstaben ($A, B, \Gamma, \dots, \Omega$) verwendet. (Lies: *groß Alpha*, *groß Beta*, *groß Gamma*.)

Jede *nicht infinite* hyperreelle Zahl wird *finit* genannt. Zu jeder finiten hyperreellen Zahl h existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl r , die zu h infinitesimal benachbart ist, also $h = r + \alpha$. Da-

bei wird r als *reeller Teil*⁴ (RT) und α als *infinitesimaler Teil* von h bezeichnet, in Zeichen: $\text{RT}(h) = \text{RT}(r + \alpha) = r$.

Bei der Analyse hyperreeller Terme ist oft nicht der genaue numerische Wert des Ergebnisses interessant, sondern lediglich, von welchem der oben genannten Zahlentypen das Ergebnis ist. Besonders oft benötigt man den Satz, dass das Produkt aus einer reellen und einer infinitesimalen Zahl wieder infinitesimal ist; daher wird im Folgenden ein Beweis dazu angegeben.

Theorem 1. Das Produkt aus einer reellen Zahl und einer infinitesimalen Zahl ist infinitesimal.

Beweis. Für $r = 0$ oder $\alpha = 0$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Seien $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\alpha \neq 0$ infinitesimal. Angenommen, $r \cdot \alpha$ sei reell, dann müsste es eine positive reelle Zahl p geben, so dass $|r \cdot \alpha| > p$, also $|\alpha| > \frac{p}{|r|}$ gilt. Da der Quotient zweier positiver reeller Zahlen wieder eine positive reelle Zahl ist, stellt dies einen Widerspruch zur Voraussetzung dar, dass α infinitesimal ist. Also muss $r \cdot \alpha$ infinitesimal sein⁵. \square

Die folgenden Tabellen geben für die Grundrechenarten jeweils den Typ des Ergebnisterms an, sofern dies möglich ist. Die Buchstaben in den Tabellen haben dabei folgende Bedeutung:

A, B und Γ stehen für den infiniten Zahlentyp.

f , g und h bezeichnen den finiten Zahlentyp mit den Spezialfällen

α , β und γ für den infinitesimalen Zahlentyp und

x , y und z für den reellen Zahlentyp.

In den Ergebnissfeldern steht immer „linke Zahl“ verknüpft mit „oberer Zahl“.

In den Tabellen stehen Symbole für den Typ des Ergebnisses, der sich im Allgemeinen ergibt. Im Feld für die Summe zweier finiter Zahlen steht also ein h , weil die Summe in jedem Fall finit ist, wenn auch in besonderen Fällen eine infinitesimale oder reelle Zahl oder sogar null herauskommen kann.

Es fällt auf, dass in einigen Feldern Fragezeichen stehen. In diesen Fällen ist eine genauere Kenntnis der beteiligten Zahlen erforderlich, um die Größenordnung des Ergebnisses angeben zu können. Dazu ein Beispiel: Das Produkt einer infinitesimalen und einer infiniten Zahl kann finit, ja sogar reell sein, wenn die beteiligten Zahlen z. B. Kehrwerte voneinander sind. Es kann infinit sein,

² lat. infinitus – unendlich (groß), infinitesimal – unendlich klein.

³ Robinson nennt in [11] alle Elemente aus ${}^*\mathbb{R}$ reelle Zahlen und die aus \mathbb{R} *Standard-Zahlen*; vgl. die Begriffsdefinitionen weiter unten.

⁴ Robinson verwendet in [11] die Bezeichnung *Standard-Teil*.

⁵ Für die weiteren möglichen Annahmen, $r \cdot \alpha$ sei finit oder gar infinit, lässt sich entsprechend argumentieren.

wenn der eine Faktor z. B. A^2 und der andere z. B. $\alpha = A^{-1}$ ist. Das Produkt $A^2 \cdot \alpha$ ist dann A , also infinit. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass Produkte wie $A \cdot \alpha^2$ infinitesimal sind.

Addition:

+	β	y	g	B
α	γ	h	h	Γ
x	h	z	h	Γ
f	h	h	h	Γ
A	Γ	Γ	Γ	?

Subtraktion:

-	β	y	g	B
α	γ	h	h	Γ
x	h	z	h	Γ
f	h	h	h	Γ
A	Γ	Γ	Γ	?

Multiplikation:

·	β	y	g	B
α	γ	γ	γ	?
x	γ	z	h	Γ
f	γ	h	h	?
A	?	Γ	?	Γ

Division:

:	$\beta \neq 0$	$y \neq 0$	$g \neq 0$	B
α	?	γ	?	γ
x	Γ	z	h	γ
f	?	h	?	γ
A	Γ	Γ	Γ	?

Die Bildung des reellen Teils ist mit den Grundrechenarten verträglich, es gilt also folgender Satz, der häufig bei der Analyse hyperreeller Terme angewendet wird:

Theorem 2 (Rechenregeln für den reellen Teil). Für alle finiten hyperreellen Zahlen g und h gilt:

- (a) $RT(g + h) = RT(g) + RT(h)$,
- (b) $RT(g - h) = RT(g) - RT(h)$,
- (c) $RT(g \cdot h) = RT(g) \cdot RT(h)$,
- (d) $RT(\frac{g}{h}) = \frac{RT(g)}{RT(h)}$, falls $RT(h) \neq 0$.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich leicht unter Verwendung der oben dargestellten allgemeinen Regeln für hyperreelle Terme und des Begriffes der infinitesimalen Nachbarschaft beweisen (siehe z.B. [3]).

Die Technik des Rechnens mit hyperreellen Zahlen hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Verwendung komplexer Zahlen in der Elektrotechnik: Dort wird bei Wechselstrom-Vorgängen mit komplexen an Stelle von reellen Zahlen gerechnet (weil es einfacher ist). Aus dem Realteil und dem Imaginärteil des komplexen Ergebnisses entnimmt man dann die jeweils interessierende Information. In der Analysis überträgt man das Problem in die Welt der hyperreellen Zahlen, löst es dort (weil es einfacher ist), und der reelle Teil des Ergebnisses liefert die gewünschte Information.

Ein didaktisch sehr gewinnbringend einsetzbares Hilfsmittel – das nur in der Welt der hyperreellen Zahlen zur Verfügung steht – ist die Vergrößerung⁶ eines Funktionsgraphen in einem (reellen) Punkt mit einem infiniten Vergrößerungsfaktor⁷ (vgl. auch den nächsten Abschnitt).

Die hyperreelle Zahlengerade lässt nicht nur die aus dem Reellen bekannten Maßstabsänderungen zu. Hier sind auch infinite und infinitesimale Streckfaktoren möglich. Wird z. B. wie in Abbildung 1 mit einem infiniten Faktor $k = \frac{3,5}{\alpha}$ an einer reellen Stelle r gestreckt, so gibt es außer der Zahl r selbst keine einzige reelle Zahl mehr im vergrößerten Ausschnitt der Zahlengeraden, denn alle anderen reellen Zahlen sind unendlich weit weggerückt. Statt dessen werden nichtreelle Zahlen sichtbar, die zu r infinitesimal benachbart sind. Diese nur in \mathbb{H} mögliche Vergrößerung wird mittels der Unendlichkeitsbrille $\overset{\infty}{\text{P}}$ veranschaulicht. Dabei wird die (reelle) Stelle r der hyperreellen Zahlengeraden, an der infinit vergrößert (oder verkleinert) wird, hervorgehoben.

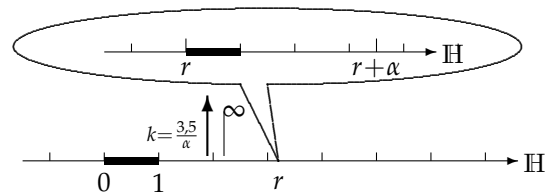


Abbildung 1. Vergrößerung der hyperreellen Zahlengerade an einer finiten Stelle mit einem infiniten Faktor

Will man infinitesimale Zahlen sichtbar machen, so wendet man die Unendlichkeitsbrille bei der Null an (vgl. Abb. 2). Mit dem Vergrößerungsfaktor $k = \frac{1,5}{\alpha}$ erscheint dann die Zahl α im Abstand 1,5 (ursprünglicher) Maßeinheiten von Null entfernt. Entsprechendes gilt für Zahlen wie 2α und $-\alpha$.

⁶ Gemeint ist eine zentrische Streckung.
⁷ Dazu ist vorher die hyperreelle Erweiterung der Funktion erforderlich.

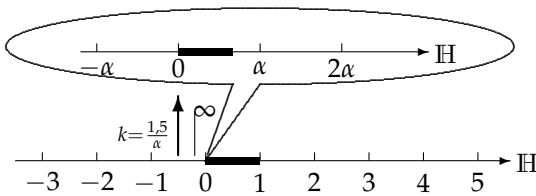


Abbildung 2. Infinitesimale Zahlen auf der hyperreellen Zahlengeraden

Wird umgekehrt ein infinitesimaler Faktor benutzt, so ist der gesamte finite Bereich von \mathbb{H} – also auch ganz \mathbb{R} – in dieser Vergrößerung von null ununterscheidbar geworden (vgl. Abb. 3). Es ist sinnvoll, diese Stelle aus Symmetriegründen mit 0 zu bezeichnen. Aber auch die Bezeichnung \mathbb{R} ist brauchbar, wenn man beachtet, dass nicht nur reelle Zahlen zu diesem Punkt „verschmolzen“ sind.

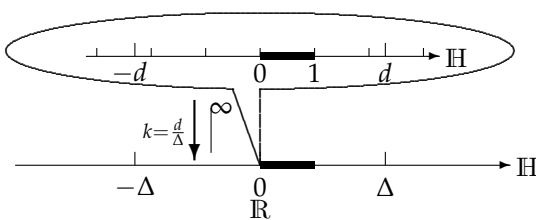


Abbildung 3. Mit einem infinitesimalen Faktor „geschrumpfte“ hyperreelle Zahlengerade

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass nicht angegeben werden kann, wo der Übergang finit – infinit stattfindet. Die Annahme, eine Zahl a sei die größte finite Zahl, führt man sofort zum Widerspruch, denn $a + 1$ ist noch größer, aber ebenfalls finit. Analog zeigt man, dass es keine kleinste (positiv) infinite Zahl gibt. Entsprechendes gilt auch für den Übergang infinitesimal – nicht infinitesimal.

3 Differenzialrechnung

Die Aufgabe, eine Funktion abzuleiten, reduziert sich immer auf das sogenannte Steigungsproblem. Deshalb soll im Folgenden dargelegt werden, wie man die Steigung eines Funktionsgraphen an einer bestimmten Stelle mittels hyperreeller Zahlen errechnet. Dabei kann es sehr hilfreich sein, mit der Vergrößerungstechnik zu arbeiten.

Schüler haben eine intuitive Vorstellung davon, was man unter der Steigung eines Graphen in einem Punkt versteht. Vor die Aufgabe gestellt, an einem Punkt P_0 eines gegebenen Graphen, beispielsweise einer Parabel, zu zeigen, wie stark er steigt, legen sie ein Lineal so durch den Punkt, dass die Kante des Lineals bzw. die danach gezogene Linie als eine Tangente verstanden wird. Die Steigung dieser Tangente wäre dann die Steigung der Parabel in diesem Punkt.

Zum Berechnen der Steigung allerdings kann diese „Tangente“ bekanntlich keinen zweiten Punkt liefern, weswegen auf die Parabel als „Punktlieferant“ zurückgegriffen werden muss. Dann wird aber, auch aus Sicht der Schüler, die Steigung einer Sekante berechnet. Der Fehler gegenüber der gesuchten Tangentensteigung wird aber umso kleiner, je näher dieser zweite Punkt P_1 an P_0 liegt. Um das noch zeichnen zu können, muss man den Graphen, hier die Parabel zu $f(x) = x^2$, in diesem Punkt vergrößern. Tut man dies in mehreren Schritten, dann entsteht zum Beispiel eine Bilderfolge wie in Abbildung 4. Mit dem Punkt $P_0(1;1)$ als Streckzentrum wurde die Parabel zweimal mit dem Faktor 3 gestreckt, wobei im letzten Bild die Koordinatenachsen durch P_0 gelegt wurden.

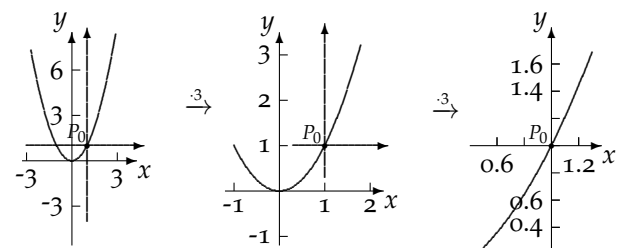


Abbildung 4. Graph der Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ in verschiedenen Maßstäben

Sofort erkennt man: Je stärker vergrößert wird, desto weniger gekrümmt erscheint die Parabel. Wenn man nun die Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{H} erweitert, was an der Schreibweise und an den Graphen der Abbildung 4 nichts ändert, dann kann man auch mit einem infiniten Faktor vergrößern, zum Beispiel $\frac{1}{\alpha}$.

Hätte man die Funktion nicht vorher erweitert, dann würde im infinit vergrößerten Bild einzig nur der Punkt P_0 erscheinen. Alle reellen Nachbarpunkte sind in dieser Vergrößerung unendlich weit weggerückt, weil jede reelle Differenz $x - x_0$ nach Multiplikation mit dem infiniten Vergrößerungsfaktor ein infinites Produkt ergibt (vgl. die entsprechende Rechentabelle in Abschnitt 2).

Aber wie ist der Graph der hyperreell erweiterten Funktion zu zeichnen? Ein zu $P_0(1;1)$ infinitesimal benachbarter Parabelpunkt sei zum Beispiel $P_1(1 + \alpha; (1 + \alpha)^2)$. Zum x -Abstand α gehört dann der y -Abstand $(1 + \alpha)^2 - 1$, also $2\alpha - \alpha^2$ bzw. $(2 + \alpha)\alpha$. Der ausgeklammerte Faktor α gleicht den Vergrößerungsfaktor insofern aus, als im vergrößerten Bild die Länge α genau einer Einheit im unvergrößerten Bild entspricht. Der Nachbarpunkt $P_1(1 + \alpha; (1 + \alpha)^2)$ ist somit im vergrößerten Bild gegenüber P_0 in y -Richtung um $2 + \alpha$ verschoben, also um zwei plus etwas Infinitesimales. Dieser infinitesimale Bestandteil kann aber auch in dieser Vergrößerung nicht gezeichnet werden. Weil dies

für alle infinitesimalen Nachbarpunkte gilt, ist die Parabel in dieser Vergrößerung infinitesimal gekrümmt und somit genauso zu zeichnen wie eine Gerade. Abbildung 5 zeigt diesen „Blick durch die Unendlichkeitsbrille“.

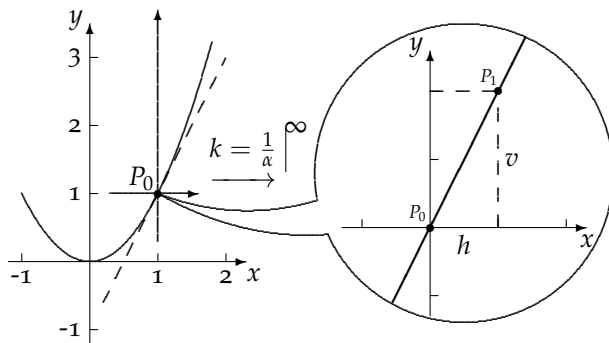


Abbildung 5. Die Parabel zu $f(x) = x^2$, mit infinitem Faktor $\frac{1}{\alpha}$ vergrößert

Bereits diese Überlegung legt nahe, dass die Tangente in P_0 somit gefunden ist. Für die Steigung $\frac{v}{h}$ zwischen $P_0(1; 1)$ und $P_1(1 + \alpha; (1 + \alpha^2))$ ergibt sich nun die folgende Rechnung.

$$\begin{aligned} \frac{f(1 + \alpha) - f(1)}{(1 + \alpha) - 1} &= \frac{(1 + \alpha)^2 - 1^2}{(1 + \alpha) - 1} \\ &= \frac{1 + 2\alpha + \alpha^2 - 1}{\alpha} \\ &= \frac{2\alpha + \alpha^2}{\alpha} \\ &= 2 + \alpha \end{aligned}$$

Offenbar tritt der Unterschied in den x -Werten in der Steigung unmittelbar wieder auf. Das Rechenresultat ist infinitesimal benachbart zur Zahl 2. Da die Steigung des reellen Funktionsgraphen gesucht ist, kann dieser reelle Teil als die gesuchte Steigung der Parabel an der Stelle 1 betrachtet werden.

Die mit der Unendlichkeitsbrille betrachtete Parabel ist nun die Vorlage für die Tangente. Übernimmt man diese Gerade in die unvergrößerte Zeichnung, dann soll diese als die Tangente der Parabel im Punkt P_0 betrachtet werden.

Bemerkenswert an diesem Vorgehen ist, dass, unterstützt von einer Grafik, wirklich nur gerechnet wurde. Es bedurfte nicht der Vorstellung eines Prozesses des Immer-kleiner-Werdens einer Zahl, was die bekannte sehr formale Beweisführung erfordert. Stattdessen ist ein vergleichsweise einfacher Term zu behandeln, worin mit dem Zeichen α die Vorstellung einer infinitesimalen Zahl zu verbinden ist.

Dieses Rechnen lässt sich sofort üben. Zunächst ändert man die x -Werte von P_0 und erhält immer eine andere Steigung, die offenbar wiederum eine Funktion ist, die Steigungsfunktion. Dann

macht man es allgemein, also für alle x auf einmal, gibt der neuen Funktion wegen des engen Zusammenhangs mit f die Bezeichnung f' und nennt sie „Ableitungsfunktion“. Schließlich wendet man dieses Verfahren auf andere Potenzfunktionen wie $g(x) = x^3$ und $h(x) = x^4$ an, welche man wiederum zu Beginn gedanklich von \mathbb{R} nach \mathbb{H} zu erweitern hat.

Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{(x + \alpha)^3 - x^3}{(x + \alpha) - x} &= \frac{x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 - x^3}{\alpha} \\ &= 3x^2 + 3x\alpha + \alpha^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{(x + \alpha)^4 - x^4}{(x + \alpha) - x} &= \frac{x^4 + 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 + 4x\alpha^3 + \alpha^4 - x^4}{\alpha} \\ &= 4x^3 + 6x^2\alpha + 4x\alpha^2 + \alpha^3. \end{aligned}$$

Es sind die bekannten Umformungen bis zu den jeweils letzten Termen. Nun wird allerdings kein Grenzprozess vorgenommen, sondern es werden die Rechentabellen aus Abschnitt 2 angewendet, und man stellt fest, dass alle Summanden, in denen der infinitesimale Faktor α auftritt, selbst infinitesimal sind. Geht man zum reellen Teil über, dann fallen diese Summanden weg, und es bleibt der jeweilige Ableitungsterm übrig, nämlich

$$g'(x) = \text{RT}(3x^2 + 3x\alpha + \alpha^2) = 3x^2$$

und

$$h'(x) = \text{RT}(4x^3 + 6x^2\alpha + 4x\alpha^2 + \alpha^3) = 4x^3.$$

Wie bereits in Abschnitt 2 angedeutet, erweisen sich die Zahlbereichserweiterung von \mathbb{R} nach \mathbb{H} und die infinitesimalen Zahlen als gutes Hilfsmittel, Steigungen reeller Funktionsgraphen bzw. die Ableitungen Potenzfunktionen zu berechnen. Zudem tritt beim Rechnen mit infinitesimalen Zahlen nicht das Begründungsproblem bei der entsprechenden Grenzwertüberlegung auf, dass man den Bruchterm zunächst mit einer Zahl kürzt, die man unmittelbar danach null werden lässt. Hätte man dann überhaupt vorher kürzen dürfen?

Hat man sich dann mit den binomischen Formeln und dem Pascalschen Dreieck beschäftigt, dann kann man schließlich die Potenzregel errechnen.

$$\begin{aligned} \frac{(x + \alpha)^n - x^n}{(x + \alpha) - x} &= \frac{x^n + n \cdot x^{n-1}\alpha + (\text{Rest mit mindestens } \alpha^2) - x^n}{\alpha} \\ &= n \cdot x^{n-1} + (\text{Rest mit mindestens } \alpha) \end{aligned}$$

Jeder Summand in diesem Rest ist das Produkt finiter und infinitesimaler Zahlen. Jeder ist infinitesimal, fällt also beim Bilden des reellen Teils weg, und somit ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Verallgemeinert man diese Gedanken und wechselt zur üblichen Schreibweise, dann erhält man die folgenden Definitionen für die zentralen Begriffe Differenzierbarkeit, Tangente und Ableitung einer Funktion.

Die Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* x_0 , $x_0 \in D_f \subseteq \mathbb{R}$, genau dann, wenn sich eindeutig die reelle Zahl $m(x_0)$ angeben lässt; diese ist definiert durch

$$m(x_0) := \text{RT} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

für jedes infinitesimale h mit $h \neq 0$. Der hier auftretende Quotient wird *Differenzialquotient* genannt, da (bei stetigen Funktionen) Zähler und Nenner infinitesimal sind (s.u.). Die Steigung $m(x_0)$ lässt sich auch so beschreiben: Es ist diejenige reelle Zahl, welche zu *allen* Differenzialquotienten⁸ $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ infinitesimal benachbart ist.

Die Tangente eines Funktionsgraphen an einer Stelle kann dann wie folgt definiert werden: Die Gerade, welche den Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ mit dem Graphen G_f gemeinsam hat und die Steigung $m(x_0)$ besitzt, heißt *Tangente an G_f in P_0* .

Der Begriff der Ableitungsfunktion wird dann folgendermaßen definiert: Die reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, mit dem Definitionsbereich D_f heißt (auf D_f) *differenzierbar* oder *ableitbar* genau dann, wenn sie an jeder Stelle x , $x \in D_f$, differenzierbar ist. Die Funktion f' , die jedem dieser x die Steigung $m(x)$ zuordnet, heißt *Ableitung* von f .

Der wichtige Begriff der Stetigkeit kann mit hyperreellen Zahlen folgendermaßen definiert werden: Eine reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)$ mit dem Definitionsbereich D_f heißt (auf D_f) *stetig* genau dann, wenn für jede Stelle x , $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}$, gilt: $(x + h) - x$ infinitesimal $\Rightarrow f(x + h) - f(x)$ infinitesimal. In dieser einfachen und intuitiv unmittelbar verständlichen Formulierung zeigt sich in aller Deutlichkeit der Vorteil der hyperreellen Zahlen gegenüber der üblichen ε - δ -Definition..

Auf dieselbe Weise wie oben bei der Potenzregel *errechnet* man weitere Ableitungsregeln. Im Folgenden werden die Summen-, Produkt- und Kettenregel ausgerechnet. Es erweist sich als nützlich, dabei das zum Differenzial h der x -Werte gehörige Differenzial der Funktionswerte mit v zu bezeichnen.

Seien die Funktionen f_1 und f_2 differenzierbar und die Summenfunktion f durch $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ definiert. Dann ist $v = f(x + h) - f(x) = f_1(x + h) + f_2(x + h) - (f_1(x) + f_2(x)) = v_1 + v_2$. Für die Quotienten erhält man dann:

$$\begin{aligned} \frac{v}{h} &= \frac{v_1 + v_2}{h} \\ \text{RT} \left(\frac{v}{h} \right) &= \text{RT} \left(\frac{v_1}{h} + \frac{v_2}{h} \right) \\ &= \text{RT} \left(\frac{v_1}{h} \right) + \text{RT} \left(\frac{v_2}{h} \right) \end{aligned}$$

Es gilt also $f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x)$.

In genau so eleganter Weise lässt sich die Produktregel errechnen. Dabei hilft die oft genutzte anschauliche geometrische Vorstellung eines Produktes, hier der beiden Funktionswerte $f_1(x)$ und $f_2(x)$, als Flächeninhalt eines Rechtecks. Dessen Veränderung besteht dann aus drei Teilen, die sich aus der infinitesimalen Veränderung von x ergeben (vgl. Abbildung 6).

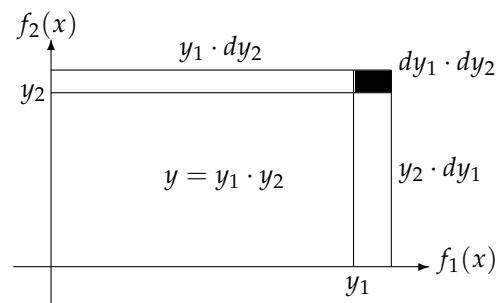


Abbildung 6. Zur Produktregel

Es sei also p das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen f_1 und f_2 mit $p(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = y_1 \cdot y_2$ als abkürzende Schreibweise. Eine infinitesimale Veränderung von y_1 wird dann mit dy_1 bezeichnet und entsprechend mit dy_2 für eine infinitesimale Änderung von y_2 . Die Veränderung des Produkts besteht dann entsprechend Abbildung 6 aus drei Summanden, nämlich $y_1 \cdot dy_2$, $y_2 \cdot dy_1$ und $dy_1 \cdot dy_2$. Sie bilden den Zähler des Differenzialquotienten, der Nenner ist wie immer h .

$$\frac{v}{h} = \frac{y_2 \cdot dy_1 + y_1 \cdot dy_2 + dy_1 \cdot dy_2}{h}$$

Wieder ausgeschrieben erhält man

$$\begin{aligned} \frac{v}{h} &= \frac{f_1(x + h) - f_1(x)}{h} \cdot f_2(x) \\ &+ \frac{f_2(x + h) - f_2(x)}{h} \cdot f_1(x) \\ &+ \frac{f_1(x + h) - f_1(x)}{h} \cdot (f_2(x + h) - f_2(x)), \end{aligned}$$

⁸ bei infinitesimalem, von null verschiedenem h

wobei im letzten Summanden ein finiter Quotient mit etwas Infinitesimalem multipliziert wird. Dieses Produkt ist also gemäß Satz 1 infinitesimal und fällt somit bei der Bildung des reellen Teils weg, so dass nun feststeht, wie man das Produkt zweier ableitbarer Funktionen ableitet⁹:

$$p'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x).$$

Auch die Kettenregel kann mittels infinitesimaler Zahlen leicht ermittelt werden. Hier macht man sich zunutze, einen Bruch mit etwas Infinitesimalem erweitern zu können. In der Zahlenmenge \mathbb{R} geht das nicht. Sei also f die Verkettung zweier Funktionen u und v und damit $f(x) = v(u(x))$. Der Differentialquotient ist dann

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{(x+h) - x},$$

dessen reeller Teil nicht die Ableitung f' sein kann, denn im Nenner muss die Differenz der beiden Argumente des Zählers stehen, nämlich $u(x+h) - u(x)$. Dann wäre der reelle Teil gleich $v'(u(x))$. Erweitert man aber mit dem erforderlichen Nenner, der zwar infinitesimal, aber eben nicht null sein soll, dann entsteht das Produkt zweier Differentialquotienten, nämlich

$$\frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x},$$

deren reelle Teile tatsächlich Ableitungen bedeuten. Man erhält $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$ als Ableitung einer Verkettung¹⁰.

Im letzten Beispiel geht es um die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion. Dabei wird ausgenutzt, dass Graphen differenzierbarer Funktionen bei „einfach“ infinitesimaler Vergrößerung nicht von einer Geraden unterschieden werden können.

Die Funktionen \sin und \cos sind am Einheitskreis definiert. Zu irgendeinem Punkt P auf diesem Kreis gehört ein Winkel der Größe x , der an der ersten Achse angetragen wird. Dem entspricht auf dem Kreis der zugehörige Bogen der Länge x (im Bogenmaß). Auf der ersten Achse liest man $\cos(x)$ als erste Koordinate des Punktes P , auf der zweiten Achse $\sin(x)$ als zweite Koordinate des Punktes P ab, wie Abbildung 7 zeigt. Zudem erscheint der betrachtete Winkel als Stufenwinkel in P .

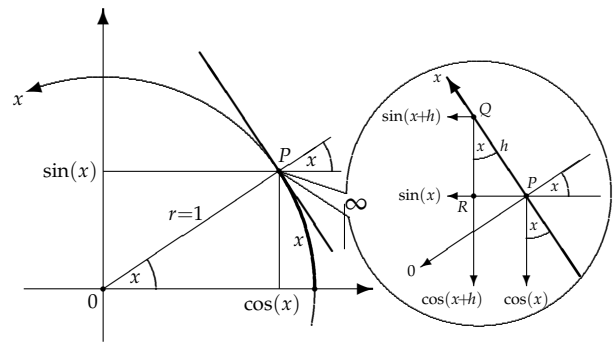


Abbildung 7. Zur Ableitung von Sinus und Kosinus

Im Punkt P wird der Kreis nun mit infinitem Faktor vergrößert. Dabei wird ein infinitesimal benachbarter Punkt Q an der Stelle $x+h$ sichtbar, der im „normalen“ Maßstab nicht getrennt von P sichtbar ist. Der Stufenwinkel von x in P ist in der infiniten Vergrößerung unverändert. Der Kreis erscheint in P zu einer Geraden gestreckt und kann daher von der dortigen Tangente nicht unterschieden werden.

In der Vergrößerung tritt der Winkel der Größe x an zwei weiteren Stellen auf, in Q gehört er zum Dreieck PQR , worin man folgendes abliest:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{|\overline{QR}|}{|\overline{PQ}|} \\ &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{|\overline{RP}|}{|\overline{PQ}|} \\ &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

wenn man berücksichtigt, dass bei der letzten Rechnung im Zähler das Größere vom Kleineren subtrahiert wird.

Gerade das Beispiel der Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion zeigt, welches Potential in der Vergrößerungstechnik steckt, einem Verfahren, das der Grenzwert-Analyse nicht zur Verfügung steht. Aber auch die anderen Beispiele in diesem Abschnitt über das Differenzieren haben die erhebliche Vereinfachung deutlich gemacht, die sich oft beim Rechnen mit hyperreellen Zahlen gegenüber der Grenzwertmethode einstellt.

⁹ Robinson zeigt in [11] eine Variante dieser Herleitung mit dem Begriff der infinitesimalen Nachbarschaft.

¹⁰ Für den separat zu betrachtenden Fall, dass $u(x+h) - u(x) = 0$ ist, liefert die Regel ebenfalls das richtige Ergebnis, denn wegen $u(x+h) = u(x)$ ist auch $v(u(x+h)) = v(u(x))$. Der Zähler ist in diesem Falle von vornherein null, Erweitern ist gar nicht mehr nötig.

4 Integralrechnung

Auch bei der Integralrechnung erweist es sich als vorteilhaft, infinitesimale und infinite Zahlen zur Verfügung zu haben. Wichtig ist hier insbesondere, mittels hypernatürlicher Zahlen auch im Unendlichen zählen zu können.

Ein möglicher Zugang zur Integralrechnung besteht darin, Flächeninhalte unter Funktionsgraphen bei fester unterer und variabler oberer Grenze zu berechnen. Nimmt man beispielsweise zunächst die konstante Funktion f mit $f(x) = 2$ und als feste untere Grenze $a = 0$, dann hängt der Flächeninhalt F von der verschiebbaren oberen Grenze x ab. Der Flächeninhalt¹¹ lässt sich als Rechteck leicht berechnen, er ist eine neue Funktion, nämlich die lineare Funktion F mit $F(x) = 2x$.

Das Verfahren lässt sich auch auf diese neue Funktion anwenden, aber mit dem Unterschied, dass nun Inhalte von Dreiecken zu berechnen sind. Nennt man nun die neue Funktion wieder f , dann erhält man als deren Flächeninhaltsfunktion $F(x) = x^2$. Das funktioniert bei anderen konstanten oder linearen Funktionen, sogar bei affin linearen Funktionen des Typs $f(x) = m \cdot x + n$, denn die Flächen, deren Inhalte zu berechnen sind, sind Rechtecke, Dreiecke oder Trapeze. Alle sind geradlinig begrenzt und damit leicht berechenbar. Das Verfahren nennt man *Funktionsintegration*.

Will man auch zu $f(x) = x^2$ eine Flächeninhaltsfunktion ermitteln, wird es schwierig, denn die Flächen, deren Inhalte man bei variabler oberer Grenze berechnen möchte, sind nun krummlinig begrenzt. Nähert man sich dem Flächeninhalt mit Rechtecken, dann berechnet man entweder einen zu kleinen oder einen zu großen Flächeninhalt, man nenne sie $F_u(x)$ für *unterhalb* bzw. $F_o(x)$ für *oberhalb* des wahren Flächeninhalts.

Aber auch das arithmetische Mittel von $F_u(x)$ und $F_o(x)$ kann nicht der gesuchte Wert sein, weil die Kurve nicht die Diagonale des jeweiligen Differenzrechtecks ist. Jede Berechnung mit Rechtecken ist also fehlerhaft, entweder ist der berechnete Wert zu klein oder zu groß. Teilt man das Intervall $[0; x]$ in vier gleich große Teile, dann erhält man für die zu kleine Fläche, für die nur drei Rechtecke entstehen,

$$F_{u_4}(x) = \frac{1}{4}x \cdot \left(\left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \left(\frac{2}{4}x\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \right)$$

und nach weitestmöglichem Ausklammern

$$F_{u_4}(x) = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2).$$

Ganz entsprechend ergibt sich für die zu große Fläche mit tatsächlich vier Rechtecken mit

$$F_{o_4}(x) = \frac{1}{4^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

ein sehr ähnlicher Term. Dies korreliert auch mit der Beobachtung, dass bei F_{o_4} die drei Rechtecke von F_{u_4} lediglich nach links verschoben und um ein viertes ergänzt werden müssen.

Die Schüler merken schnell, dass der gesuchte Flächeninhalt vom berechneten umso weniger abweicht, je schmäler die Rechtecke sind. Dafür wird aber die Anzahl dieser Rechtecke immer größer. Vielleicht rechnen sie das nächste Beispiel mit acht gleich breiten Rechtecken noch durch, aber wenn sie dann

$$F_{u_8}(x) = \frac{1}{8^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2)$$

bzw.

$$F_{o_8}(x) = \frac{1}{8^3} \cdot x^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2)$$

errechnet haben, erkennen sie, welche Terme bei 100, 1000 usw. gleich breiten Rechtecken entstehen würden. Aber auch diese Flächeninhalte weichen noch vom gesuchten ab. Je feiner man aber das Intervall $[0; x]$ unterteilt, desto geringer muss dann die Abweichung vom gesuchten Flächeninhalt sein. Schüler sagen dann gern, dass man unendlich viele Rechtecke braucht, die dann natürlich unendlich schmal sein müssen. Mittels hyperreeller Zahlen ist dies auch rechnerisch zu verwirklichen.

Erweitert man nun den Definitionsbereich der Funktion f von \mathbb{R} nach \mathbb{H} , dann wird eine unendlich große Anzahl Rechtecke möglich.

Ebenfalls zu beachten ist, dass für dieses Verfahren *besondere* infinite Zahlen herangezogen werden müssen. Sie müssen die Eigenschaft des Zählens in sich tragen, die im Finiten den natürlichen Zahlen zukommt (vgl. die Ausführungen dazu in Abschnitt 5).

Sei also das Intervall $[0; x]$ in \mathbb{N} (ein großes griechisches Ny für eine hypernatürliche Zahl) gleich große Stücke geteilt, dann ergeben sich für die Flächeninhalte die Ausdrücke

$$F_{u_{\mathbb{N}}}(x) = \frac{1}{\mathbb{N}^3} \cdot x^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (\mathbb{N} - 1)^2)$$

bzw.

$$F_{o_{\mathbb{N}}}(x) = \frac{1}{\mathbb{N}^3} \cdot x^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \mathbb{N}^2).$$

¹¹ Dieser kann durchaus negative Werte annehmen, wenn man den Flächeninhalt, z. B. über den Umlaufsinn, mit einem Vorzeichen versieht.

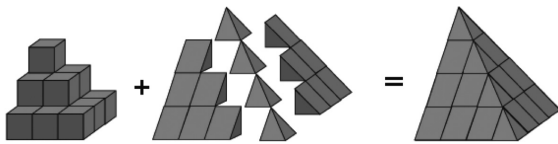


Abbildung 8. Zur Summenformel der Quadratzahlen

Es sind also die ersten N Quadratzahlen aufzusummieren, aber *es sind infinit viele*. Aus der Abbildung 8 kann man die Formel für die Summe der Quadratzahlen ablesen:¹²

$$\sum_{i=1}^N i^2 + \sum_{i=1}^N i + \frac{1}{3}(N+1) = \frac{1}{3}(N+1)^3,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N i^2 &= \frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N \\ &= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1). \end{aligned}$$

Man schreibt nun für die infinite Summe den Produktterm und erhält für $F_{0N}(x)$

$$F_{0N}(x) = \frac{1}{N^3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1).$$

„Verteilt“ man nun das N^3 im Nenner unter die anderen Faktoren und formt um, wird sichtbar, dass dieser Term nicht infinit, sondern finit ist, denn der Kehrwert $\frac{1}{N}$ des infiniten N ist infinitesimal:

$$\begin{aligned} F_{0N}(x) &= x^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{N+1}{N} \cdot \frac{2N+1}{N} \\ &= x^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{N}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Ganz entsprechend erhält man

$$F_{uN}(x) = x^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{N}\right).$$

Sowohl $F_{uN}(x)$ als auch $F_{0N}(x)$ sind infinitesimal benachbart zu $\frac{1}{3}x^3$, besitzen also denselben reellen Teil, denn die Kehrwerte der hypernatürlichen Zahl N in den Klammern sind infinitesimal. Geht man also in die reelle Zahlenwelt zurück, entfalten diese infinitesimalen Summanden jeweils; der Flächeninhalt mit dem krummen Rand ist somit tatsächlich berechnet. Es gilt also

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3.$$

An dieser Stelle lohnt nun eine Zusammenfassung des bisher Untersuchten. Dem einen oder anderen

Schüler mag aufgefallen sein, dass die Ergebnisse bei der Funktionsintegration so aussehen, als hätte man das Ableiten rückgängig gemacht. Man kann dies untersuchen, indem man den Flächenzuwachs berechnet, der sich bei einer infinitesimalen Verschiebung der oberen Grenze ergibt.

Hat man also unter dem Graphen irgendeiner (stetigen) Funktion¹³ f von einer unteren Grenze bis zur oberen Grenze x den Flächeninhalt $F(x)$ bereits bestimmt, so werde nun die obere Grenze um ein infinitesimales Stück α verschoben. Dazu werde der Graph von f an der Stelle x infinit vergrößert (vgl. Abbildung 9). Nach der Verschiebung der oberen Grenze beträgt der Flächeninhalt $F(x+\alpha)$, er ist also um $F(x+\alpha) - F(x)$ gewachsen. Das dazugehörige infinitesimal breite Flächenstück besitzt einen krummen Rand, allerdings ist diese Krümmung in der infiniten Vergrößerung nicht sichtbar. Deshalb nimmt man stattdessen ein Rechteck mit dieser Breite, wofür man zwei Möglichkeiten hat.

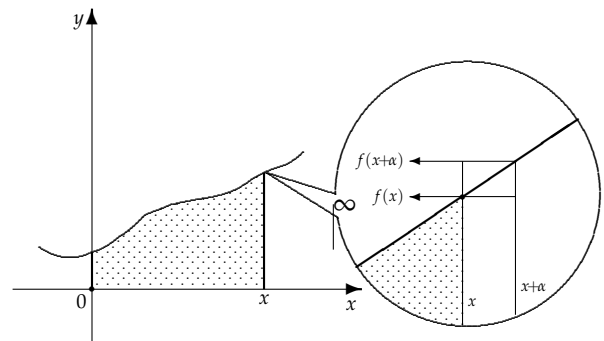


Abbildung 9. Zum Hauptsatz der Analysis

Entweder nimmt man $\alpha \cdot f(x)$, dieses Rechteck ist kleiner als der wahre Flächenzuwachs, oder $\alpha \cdot f(x+\alpha)$, dieses Rechteck ist größer. Der wahre Zuwachs liegt zwischen diesen beiden Werten:

$$\alpha \cdot f(x) \leq F(x+\alpha) - F(x) \leq \alpha \cdot f(x+\alpha).$$

Dividiert man diese Ungleichungskette durch α , so erhält man

$$f(x) \leq \frac{F(x+\alpha) - F(x)}{\alpha} \leq f(x+\alpha).$$

In der Mitte steht der Quotient zweier infinitesimaler Differenzen. Er ist finit und hat dieselbe Gestalt wie diejenigen, deren reeller Teil als Ableitung bezeichnet wurde. Links und rechts davon stehen Werte der Funktion f , die wegen der Stetigkeit von f infinitesimal benachbart sind, denn die x -Werte sind es auch (s. o.). Im Reellen bedeutet dies, dass die berandende Funktion gleich der Ableitung der

¹² In Abbildung 8 ist der Fall $N = 3$ dargestellt.

¹³ O.B.d.A. wird hier eine positive und monoton steigende Funktion betrachtet.

Flächeninhaltsfunktion ist. Damit ist der vermutete Zusammenhang zwischen Ableitung und Integration bestätigt; es ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Als letztes Beispiel soll das Volumen einer Kugel mit Hilfe unendlicher Summen berechnet werden. Sei K_r eine Kugel vom Radius r und $V(K_r)$ ihr zu bestimmendes Volumen. Wegen der Kugelsymmetrie genügt es, die Halbkugel zu betrachten. Deren Symmetrieachse sei als x -Achse gewählt, auf der das Intervall $[0; r]$ in N viele Teile der infinitesimalen Länge dx , $N \cdot dx = r$, unterteilt sei (vgl. Abb. 10). Mit dieser Einteilung sind zugleich Zylinderscheiben senkrecht zur x -Achse mit der Höhe dx definiert.

Sei Z_i die Zylinderscheibe beim Teilpunkt x_i , wobei $x_i = i \cdot dx$, $i \in \{1; 2; \dots; N\}$, und V_i ihr Volumen, dann ist zu berechnen:

$$V(K_r) = 2 \cdot RT \left(\sum_{i=1}^N V_i \right)$$

Für den Radius r_i jeder Zylinderscheibe Z_i gilt nach PYTHAGORAS $r_i^2 = r^2 - x_i^2 = r^2 - (i \cdot dx)^2$, und somit errechnet sich jedes Volumen V_i zu $V_i = \pi \cdot r_i^2 \cdot dx = \pi (r^2 - i^2 \cdot (dx)^2) dx$. Für das (hyperreelle) Volumen der Halbkugel erhält man dann mit $dx = \frac{r}{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N V_i &= \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^N r^2 dx - \sum_{i=1}^N i^2 (dx)^3 \right) \\ &= \pi \cdot \left(\sum_{i=1}^N r^3 \frac{1}{N} - \sum_{i=1}^N i^2 \frac{r^3}{N^3} \right) \\ &= \pi r^3 \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 - \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^N i^2 \right) \\ &= \pi r^3 \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot N - \frac{1}{N^3} \left(\frac{1}{3} N^3 + \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{6} N \right) \right) \\ &= \pi r^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{6N^2} \right) \end{aligned}$$

Das reelle Volumen der gesamten Kugel ist dann

$$V = 2 \cdot RT \left(\sum_{i=1}^N V_i \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Archimedes soll die Bestimmung des Kugelvolumens als seine größte Leistung betrachtet haben. Beim Finden der Lösung hat er natürlich *nicht* an Grenzübergänge gedacht, wie es in einem (in Berlin) weit verbreiteten Analysis-Schulbuch zu lesen

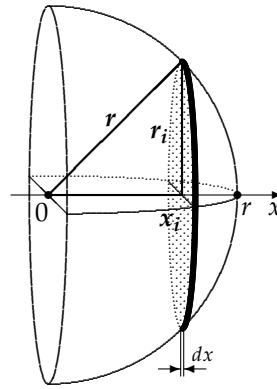


Abbildung 10. Zur Bestimmung des Kugelvolumens

ist („Nun ließ Archimedes in Gedanken die Anzahl der Streifen immer weiter anwachsen. Er bildete also den Grenzwert für $n \rightarrow \infty \dots$ “). Tatsächlich ist aus einem Brief, den Archimedes an Eratosthenes schrieb [2], bekannt, wie er wirklich dachte, nämlich unter Verwendung der – auch damals schon „verbotenen“ – Idee der Einteilung der Kugel in *aktuell unendlich* viele Scheiben.¹⁴

Die Beispiele haben gezeigt, dass der reelle Teil unendlicher Summen von infinitesimalen Summanden finit und unabhängig von der Wahl der unendlichen Anzahl N der Unterteilungen sein kann. Das (Riemann-)Integral einer Funktion kann also folgendermaßen definiert werden: Sei eine (hyperreell erweiterte) reelle Funktion f über einem (hyperreell erweiterten) reellen Intervall $[a, b]$ definiert, wobei das Intervall in N Teilintervalle der infinitesimalen Längen dx_i an den Stellen x_i unterteilt sei. $RT \left(\sum_{i=1}^N f(x_i) dx_i \right)$ heißt das *Riemann-Integral* der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ genau dann, falls dieser reelle Teil existiert und unabhängig von der Wahl der unendlichen Zerlegung des Integrationsintervalls ist.

5 Hinweise zur Vertiefung

Jede Lehrkraft wird selbst für sich (und ihre jeweilige Lerngruppe) entscheiden müssen, wie tief eine Begründung der hyperreellen Zahlen im Schulunterricht gehen kann und soll. Die originale Begründung von Robinson in [11] auf der Basis von Prädi-

¹⁴ Wer nachlesen möchte, wie Archimedes seine berühmten Lehrsätze *errechnet* hat, findet eine Darstellung einiger seiner Herleitungen, u. A. des Kugelvolumens, in moderner Formulierung in unserem Buch [3], und zwar im Exkurs über Archimedes, oder auf unserer Website www.nichtstandard.de.

Das Buch kann in einer korrigierten Version kostenlos als PDF-Datei von unserer Website heruntergeladen werden. Dort findet man auch weitere Informationen und Materialien für den Analysisunterricht mit hyperreellen Zahlen.

katenlogik erster Stufe ist sicher in der Schule nicht vermittelbar.

Für die Differenzialrechnung werden nur infinitesimale Zahlen benötigt. Hier ist eine kurze axiomatische Begründung möglich: Postuliert man die Existenz zumindest *einer* infinitesimalen Zahl, dann hat man wegen Satz 1 sofort unendlich viele infinitesimale Zahlen zur Verfügung. Das reicht aus, um Differenzialrechnung betreiben zu können.

Für die Integralrechnung geht das nicht so einfach: Zwar hat man mit den infinitesimalen Zahlen auch sogleich infinite Zahlen als deren Kehrwerte zur Verfügung (s.o.); man braucht aber für die Integralrechnung spezielle infinite, nämlich *hypernatürliche* Zahlen, damit man mit diesen zählen kann. Deren Existenz ist nicht selbstverständlich, so dass hier – zumindest ansatzweise – eine Möglichkeit zur Konstruktion der hyperreellen Zahlen behandelt werden sollte.

Einen kompakten Überblick über verschiedene Zugänge zu den hyperreellen Zahlen bietet der Wikipedia-Artikel zur „Nichtstandardanalysis“ [1]. In unserem Buch *Analysis als Infinitesimalrechnung* [3] werden verschiedene Möglichkeiten der Konstruktion der hyperreellen Zahlen im Schulunterricht auf unterschiedlichem Niveau dargestellt. In der bisherigen Unterrichtspraxis der Autoren hat sich die Konstruktion der hyperreellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Folgen reeller Zahlen als gangbarer Weg erwiesen (siehe dort).

Das Buch *Elementary Calculus* von Prof. Jerome Keisler, der von Beginn an neben Robinson auf den Gebieten Modelltheorie und Nonstandardanalysis gearbeitet hat, bietet eine umfassende Darstellung der Analysis mit hyperreellen Zahlen auf College-Niveau [8]. Es kann ebenfalls kostenlos als PDF-

Datei von Keislers Website heruntergeladen werden [6]. Dies gilt auch für Keislers Buch *Foundations of Infinitesimal Calculus* [7], das als Ergänzung auf höherem Niveau für Lehrkräfte und fortgeschrittene Studierende gedacht ist und verstärkt die mathematischen Hintergründe behandelt.

Als weitere grundlegende Werke auf dem Gebiet der Nichtstandard-Analysis seien – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – die Bücher von Laugwitz [10], Landers und Rogge [9] sowie Henle und Kleinberg [5] genannt.

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/nichtstandardanalysis>.
- [2] Archimedes. *Werke*. Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1972.
- [3] Peter Baumann, Thomas Kirski, and Helmut Wunderling. *Analysis als Infinitesimalrechnung*. DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, 2007.
- [4] Hauke Friedrich. *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Paderborn, 2001.
- [5] James M. Henle and Eugene M. Kleinberg. *Infinitesimal Calculus*. Dover Publications Inc., 1979.
- [6] Jerome Keisler. <http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html>.
- [7] Jerome Keisler. <http://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html>.
- [8] Jerome Keisler. *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. Dover Publications Inc., 2012.
- [9] Dieter Landers and Lothar Rogge. *Nichtstandard Analysis*. Springer, 1994.
- [10] Detlef Laugwitz. *Zahlen und Kontinuum*. Bibliographisches Institut, 1986.
- [11] Abraham Robinson. *Non-standard Analysis*. North-Holland Publishing Company, 1966.

Peter Baumann, Hermann-Ehlers-Oberschule, Berlin, Email: baumann@nichtstandard.de

Thomas Kirski, Hans-Carossa-Gymnasium, Berlin, Email: kirski@nichtstandard.de

Mathematische Beliefs bei Schüler/innen und Lehramtsstudierenden Entwicklungstendenzen in den letzten 15 Jahren

Renate Motzer

Als ich auf der GDM-Tagung 1998 in München einen Vortrag über die Erforschung mathematischer Beliefs (Törner 1998) hörte, fand ich dies sehr spannend. Ich war damals noch Lehrerin an der FOS/BOS (Fach- und Berufsoberschule) in Augsburg. Ein Jahr später wechselte ich zunächst an den Didaktik-Lehrstuhl der LMU München, zwei Jahre

später an die Uni Augsburg. Von 2001 bis 2014 unterrichtete ich außerdem jeweils eine Klasse an der FOS/BOS Augsburg.

Im Anschluss an die Tagung in München entwarf ich den hier gezeigten Fragebogen „Mathematische Vorstellungen“, den ich vielen Klassen an der FOS/BOS und vielen Gruppen von Lehr-

Mathematische Vorstellungen

Verteilen Sie (2 mal) insgesamt 30 Punkte auf folgende Sichtweisen der Mathematik entsprechend ihrer Bedeutung:

1. Mathematik ist ein Werkzeugkasten, es geht um die richtige Anwendung von Rechenregeln, Formeln u. ä.
2. Mathematik ist eine eigene Welt, in der aus Definition und Axiomen korrekte Zusammenhänge bewiesen werden sollen. Dabei geht es um logisches und exaktes Schlussfolgern.
3. Mathematik ist ein konstruktiver Prozess. Es sollen Gesetze aus der Wirklichkeit hergeleitet werden, Bezüge innerhalb und außerhalb der Mathematik betrachtet werden und Denken gelernt werden.

In der Realität: 1. 2. 3.
So sollte es sein: 1. 2. 3.

Bewerten Sie folgende Aussagen mit 0–4 Punkten, je nachdem wie stark Sie zustimmen können:

1. Im Mathematikunterricht ist vor allem wichtig, dass die Schüler und Schülerinnen das lernen, was nachher in der Prüfung abgefragt wird.
2. Im Mathematikunterricht ist vor allem wichtig, dass die Schüler und Schülerinnen ein mathematisches Verständnis entwickeln und dieses ggf. im Alltag anwenden können.
3. Im Mathematikunterricht ist vor allem wichtig, dass logisches Denken gefördert wird.
4. Im Mathematikunterricht ist vor allem wichtig, dass Zusammenhänge erkannt und begründet werden.

5. Es ist sehr interessant, wenn ein Problem auf verschiedene Weisen gelöst werden kann.
6. Wichtig ist, dass man eine (möglichst einfache) Lösung findet.
7. Rechenfertigkeiten sind sehr wichtig.
8. Mathematik dient dazu die Welt besser strukturieren zu können, indem man Gesetzmäßigkeiten erkennt und so einen Überblick gewinnt.
9. Ob mir Mathematik gefiel oder nicht, hing viel mit dem Lehrer/ der Lehrerin zusammen.
10. Ob mir Mathematik gefiel oder nicht, hing viel mit dem jeweils behandelten Stoff zusammen.

Beantworten Sie folgende Fragen auf der Rückseite:

1. Beschreiben Sie ein positives Erlebnis mit Mathematik
 - (a) im Alltag
 - (b) in der Schule
 - (c) an der Uni
2. Beschreiben Sie ein negatives Erlebnis mit Mathematik
 - (a) im Alltag
 - (b) in der Schule
 - (c) an der Uni
3. Erläutern Sie, was eine „Funktion“ ist.
4. Wie stellen Sie sich einen guten Mathematikunterricht vor?
5. Warum mögen Sie Mathematik bzw. mögen Sie sie nicht?

amtsstudierenden an der Uni in München und in Augsburg zum Ausfüllen gab. Am Anfang interessierte ich mich persönlich sehr für die mathematischen Weltbilder meiner Klassen bzw. meiner Studierenden. Da sich die Aussagen in den ersten Jahren zunächst immer wiederholten, ließ ich Fragebögen später mehr der Schülerinnen und Schüler bzw. der Studierenden wegen ausfüllen, damit sie sich selbst ein paar Gedanken machen konnten, was ihnen an der Mathematik wichtig ist. Für mich wurden die Fragebögen erst in den letzten Jahren wieder interessant, weil ich plötzlich eine Änderung im Antwortverhalten feststellen konnte. Darüber möchte ich hier kurz berichten.

Zunächst sollen die ersten drei Aussagen betrachtet werden, die die Jugendlichen gegeneinander abwägen sollten. Nr. 1 (Mathematik als Werkzeugkasten) entspricht bei Törner dem Aspekt T (Toolbox), Nr. 2 (Mathematik als logische Welt) heißt bei ihm S (System-Aspekt) und Nr. 3 spricht den Aspekt P (Prozess) an. Jahrelang gaben alle von mir befragten Klassen und Studierenden-Gruppen an, dass P am wenigsten repräsentiert sei, aber eigentlich das höchste Gewicht haben sollte. Nicht alle Umfrageteilnehmer waren dieser Mei-

nung, aber der Klassen-/Kurschnitt war immer so.

Als Beispiel eine Gruppe von künftigen RS/Gym-Lehrpersonen im Jahr 2001:

Realität: T: 45 %, S: 32 %, P: 23 %
so sollte es sein: T: 28 %, S: 35 %, P: 37 %

Man sieht, es wird vor allem eine Verlagerung von T nach P gewünscht.

Grundschulstudierende sahen es damals z. B. so:

T: 44 %, S: 36 %, P: 20 %
bzw. T: 26 %, S: 30 %, P: 44 %

Die Tendenz ist sehr ähnlich, allerdings würden diese Studierenden (von denen nur sehr wenige Mathematik als Hauptfach gewählt hatten) den System-Aspekt geringer bewerten und sich einen noch stärkeren Prozess-Aspekt wünschen.

Da ich den Schulklassen die Fragebögen damals wieder zurückgegeben habe, habe ich leider nur keine Auswertungen übrig, aber soweit ich mich erinnere, waren sie denen der Grundschulstudierenden nicht unähnlich.

Auch heute denken Grundschulstudierende nicht allzu sehr anders, wie die folgenden Ergebnisse eines Kurses im Sommer 2015 zeigen:

T: 40 %, S: 33 %, P: 27 %
bzw. T: 30,5 %, S: 31 %, P: 38,5 %

Gymnasialstudierende sehen in der Realität im Vergleich zu 2001 eine gewisse Verschiebung von S nach T: T: 51 %, S: 26 %, P: 23 %, im Ideal hätten sie die Verteilung gerne genau anders herum: T: 26,5 %, S: 24,5 % und P: 49 %.

Was mir hier zu denken gibt, ist in diesem Fall nicht das Verhältnis vom T zu P, sondern dass bei den Gymnasialstudierende der Aspekt S sogar weniger Prozente erhält als bei den Grundschulstudierenden (im Gegensatz zur Sicht von 2001). Dass Mathematik eine beweisende Wissenschaft ist, scheint bei unseren Gymnasialstudierenden verloren zu gehen. Sie nehmen es nicht mehr so wahr und wünschen es sich auch nicht.

Dass Beweisen und Logik nicht mehr ganz so wichtig ist, kann man auch sehen, wenn man im Fragebogen ein Stück weiter nach unten geht. Die Aussage 4 („Im Mathematikunterricht ist vor allem wichtig, dass Zusammenhänge erkannt und begründet werden“) bekommt 76,5 % der möglichen Punkte, früher waren es immerhin noch 81 %. Was das logische Denken angeht (3), ist der Wert von 95 % auf 83 % gesunken. Am meisten Punkte bekam 2001 eben das logische Denken, diesmal ist es (2) („Im Mathematikunterricht ist vor allem wichtig, dass die Schüler und Schülerinnen ein mathematisches Verständnis entwickeln und dieses ggf. im Alltag anwenden können“) mit 91 % (damals 84 %), gehört also eher zum Aspekt P. Dies sind keine radikalen Änderungen im Weltbild der Studierenden, aber aus meiner Sicht zumindest eine bedenkenswerte Tendenz.

Positiv scheint mir die Entwicklung bei den darauf folgenden Aussagen 5 („Es ist sehr interessant, wenn ein Problem auf verschiedene Weisen gelöst werden kann.“) im Vergleich zu 6 („Wichtig ist, dass man eine (möglichst einfache) Lösung findet“). Bei den Gymnasialstudierenden erhielt (5) 2015 immerhin 81 % , (6) nur 45 %. 2001 waren es bei (5) nur 68 % und somit kaum mehr als (6) mit 65 %. Die Wertschätzung für verschiedene Lösungswege ist also deutlich gestiegen. Dies ist in kleinerem Umfang auch bei den Grundschulstudierenden der Fall: 70 % für (5) und 45 % für (6) (gegen (5) 65 % zu (6) 60 % im Jahr 2001).

In den Schulklassen sehen die Antworten zu (5) und (6) etwas anders aus: (5) erhielt meist 50–60 % der möglichen Punkte, (6) deutlich mehr: 75–85 %. Schülerinnen und Schüler wünschen sich vor allem *eine* Lösung, so dass sie die Aufgaben in den Klausuren bewältigen können. Alternative Lösun-

gen interessieren schon deutlich weniger. Daran hat sich über die Jahre kaum etwas geändert.

In den letzten Jahren hat sich aber das Antwortverhalten zu den Aspekten T, S und P zumindest in den Wirtschaftsklasse der FOS/BOS gewandelt.

Eine BOS-Klasse im Sozialwesen (also vor allem junge Damen, die eine Berufsausbildung im sozialen Bereich haben) antwortete 2012 zumindest noch so, wie ich es von früher kenne:

In der Realität: T: 46 %, S: 38 %, P: 16 %
und als Wunsch: T: 29 %, S: 32 % und P: 39 %

Sie zeigte also den von den meisten Schüler/innen und Studierenden genannten Wunsch nach einer Verlagerung von T nach P.

Wirtschaftsklassen in FOS und BOS sehen dies aber in den letzten Jahren anders. Ein Beispiel:

Realität: T: 36 %, S: 36 %, P: 27 % , im Ideal: T: 39 %, S: 29 %, P: 32 %. Sie wünschen sich also gerade mal eine kleine Verlagerung von S nach P. P wird schon relativ hoch empfunden. Vielleicht hat sich der Unterricht, den diese Schüler/innen in der Realschule erlebt haben, ja tatsächlich ein wenig geändert und kommt ihnen prozess- und anwendungsorientierter vor. Jedenfalls mögen sie kaum mehr davon haben. Das sieht man auch bei der Bewertung der Aussage (2): nur 65 % und damit deutlich weniger als (6): 84 %. (6) bekommt nach (1) am meisten Punkte. (Dass (1) am meisten Punkte bekommt, ist nicht verwunderlich, denn am Ende des Schuljahrs steht eine Fachabitur-Prüfung). Mein Unterrichtskonzept, das eine stärkere Gewichtung von P vorgesehen hat, hab ich zwar nach der Umfrage nicht geändert, aber ich gestehe, ich bin doch etwas verunsichert.

Bei der ersten Klasse, die so antwortete, hielt ich das für einen Zufall, aber in den folgenden Jahren erhielt ich in Wirtschaftsklassen ähnliche Antworten. Hat sich also etwas geändert in den Köpfen der Schüler/innen, was den Prozess- und Anwendungsaspekt der Mathematik angeht? Und in den Köpfen der Gymnasialstudierenden, was die Bedeutung des Beweisens angeht?

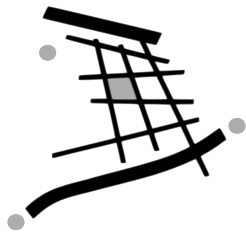
Literatur

Günter Törner, Eine Fallstudie über Lehrereinstellungen zum Mathematikunterricht- ein Vergleich von Untersuchungsmethoden, in: BzMU 1998, S. 611–614

Renate Motzer, Universität Augsburg, Universitätsstraße 10, 86135 Augsburg, Email: rena.te.motzer@math.uni-augsburg.de

25 Jahre ISTRON – 25 Jahre Arbeit für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Gilbert Greefrath, Hans-Stefan Siller und Werner Blum



Realitätsbezug und Mathematikunterricht – was heute so selbstverständlich klingt, war in den 1980er Jahren noch eher ein Randaspekt. Auf Kreta, im Istron Bay Hotel,

wurde vor 25 Jahren, genauer im Mai 1990, die internationale ISTRON-Gruppe – eine Gruppe aus sieben Personen, darunter Werner Blum und als Gründungsvater Solomon Garfunkel – gegründet. Ziel dieser Gruppe war, lange vor TIMMS oder PISA, eine Verbesserung des Mathematikunterrichts durch Realitätsbezüge. So wie heute war auch damals die Netzwerk-Idee, die auch im Logo der ISTRON-Gruppe ausgedrückt wird, konstitutiv. Die Aktivitäten der Gruppe sollten auf lokaler, regionaler, nationaler und internationaler Ebene sichtbar werden.

Die Gründung einer deutschsprachigen ISTRON-Gruppe durch Werner Blum und Gabriele Kaiser unmittelbar danach war kein Zufall und ist nicht nur eine Reaktion auf verfehlte Strengekonzepte im Mathematikunterricht der 1960er und 1970er Jahre oder eine Antwort auf seinerzeit aktuelle gesellschaftliche oder ökologische Fragen in unserer Lebenswelt. Vielmehr war die Idee von ISTRON, dass der Mathematikunterricht aus vielerlei Gründen stärker anwendungsorientiert werden sollte. Lernende sollten Situationen aus Alltag und Umwelt mit Hilfe von Mathematik verstehen lernen sowie allgemeine mathematische Qualifikationen (wie Übersetzen zwischen Realität und Mathematik) und Haltungen (wie Offenheit gegenüber neuen Situationen) erwerben – heute würden wir wohl von allgemeinen mathematischen Kompetenzen, insb. Modellieren, sprechen. Bei Lernenden soll damit ein adäquates Bild von Mathematik aufgebaut werden, das auch die tatsächliche Verwendung von Mathematik einschließt, und das Lernen von Mathematik soll mithilfe von Realitätsbezügen unterstützt werden (s. Blum 1993, S. V).

Die erfolgreiche Arbeit der ISTRON-Gruppe kann man u. a. daran erkennen, dass sie sich bei Lehrenden aus Schulen und Hochschulen, Curriculumsentwickler/inne/n, Schulbuchautor/

inn/en und Lehrerfortbilder/inne/n großer Beliebtheit erfreut und in den 25 Jahren auf über 60 Mitglieder angewachsen ist. In guter Tradition gibt es jährlich neben einem Treffen während der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik eine eigene zweitägige (Herbst-)Tagung, die an wechselnden Standorten stattfindet. Durch einen seit dem Jahr 1997 darin eingeschlossenen Fortbildungstag für Lehrkräfte wird versucht, auch in den jeweiligen Regionen neue wissenschaftliche Erkenntnisse, aktuelle Entwicklungen, konzeptionelle Planungen und Beispiele für den Einsatz im Unterricht zu präsentieren.

Eine eigene Schriftenreihe, die bis ins Jahr 2013 bei Franzbecker mit 18 Bänden aufgelegt wurde und seit 2014 bei Springer erscheint, ermöglicht der ISTRON-Gruppe mit mittlerweile 20 Bänden auch eine nachhaltige Präsenz und Sichtbarkeit in der Schulpraxis, aber auch für die wissenschaftliche Community. Die Beiträge sollen Lehrkräften helfen, Realitätsbezüge im Unterricht zu behandeln. Dabei werden die Lehrkräfte als Expertinnen und Experten für ihren Unterricht angesehen. Die Vorschläge sollen daher immer noch so viel Freiheit für die Lehrkräfte bestehen lassen, dass sie an die konkrete Situation angepasst werden können. Sie sollen Wege zu weniger üblichem Mathematikunterricht andeuten und die Unterrichtsvorbereitung unterstützen (s. u. a. Bardy, Danckwerts & Schornstein 1996). Im Folgenden erinnern wir an einige Beispiele aus den ISTRON-Bänden.

Der erste Band der ISTRON-Reihe ist hervorgegangen aus einem Wettbewerb, zu dem die internationale ISTRON-Gruppe Ende 1991 aufgerufen hatte. Gesucht wurden Beiträge, z. B. Berichte über Unterrichtserfahrungen oder Vorstellung neuer Beispiele, die das Lehren und Lernen von Mathematik in Verbindung mit realen Anwendungen betreffen (s. Blum 1993, S. VI). Auch der siegreiche Beitrag dieses internationalen Wettbewerbs ist in diesem Band vertreten: ein Beitrag von Heinz Böer über das „Extremwertproblem Milchtüte. Eine tatsächliche Problemstellung aktueller industrieller Massenproduktion“. In diesem Beitrag geht Böer der Frage nach, ob die – damals – marktübliche 1-Liter-Milchverpackung mit quadratischer Grundfläche auch verpackungs-

minimal hergestellt wird. In dem Beitrag wird ein Arbeitsblatt vorgestellt, das auch heute noch häufig im Mathematikunterricht eingesetzt wird (s. Abb. 1).

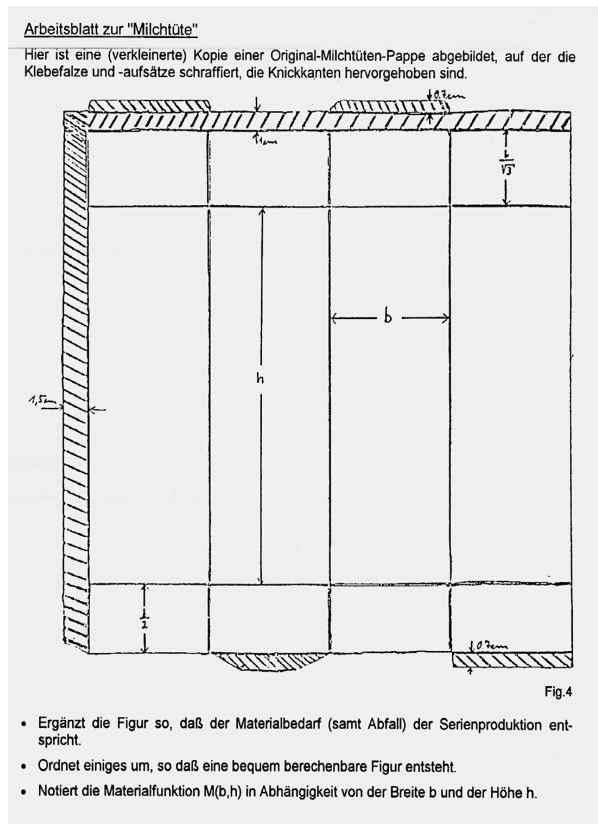


Abbildung 1. Arbeitsblatt zum Extremwertproblem Milchtüte (s. Böer 1993, S. 5)

Das Ergebnis der Überlegungen von Böer ist, dass die optimale Milchverpackung von der – damals – realen Verpackung um nur ein halbes Prozent Verpackungsmaterial abweicht.

Ein weiteres Thema, das durch Arbeiten in der ISTRON-Reihe bekannt geworden ist, ist eine Modellrechnung zum Stau. Jahnke (1997) stellt die Frage, wie viele Menschen in einem Stau bestimmter Länge stecken. Für die Beantwortung werden Befragungen durchgeführt und die Werte für die Spuren, die Autolänge, den Abstand sowie die Insassenzahl berücksichtigt. So wird beispielsweise ein Kriterium für den durchschnittlichen Abstand zweier Fahrzeuge diskutiert, das eine gewisse Rangierfreiheit der Fahrzeuge berücksichtigt (s. Abb. 2).

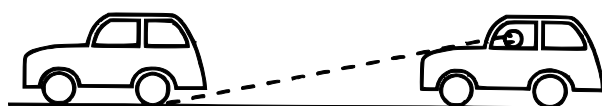


Abbildung 2. Abstand zweier Fahrzeuge (s. Jahnke 1997, S. 72)

Ebenfalls ein klassisches Thema aus einem der ISTRON-Bände ist der Beitrag von Henn (2007) zum Regenbogen im Mathematikunterricht. Der Regenbogen wird in diesem Beitrag von allen Seiten beleuchtet. Neben realen Erscheinungen und historischen Aspekten wird ein mathematisches Modell vorgestellt (s. Abb. 3), mithilfe dessen der (primäre) Regenbogen schließlich über Intensitäts-Maxima des Lichtstrahls erster Ordnung erklärt werden kann.

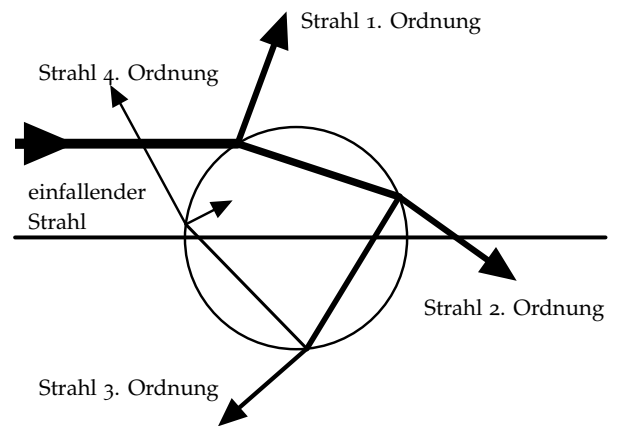


Abbildung 3. Modell zum Regenbogen (Henn 1997, S. 51)

Der Beitrag von Danckwerts und Vogel (2001) zeigt, dass auch fiktive Realitätsbezüge für den Unterricht nützlich sein können. Die Autoren schlagen einen „etwas anderen“ Zugang zur Differenzialrechnung und auch zur Integralrechnung vor. Die lokale Betrachtung eines realen (Arbeits-) Vorgangs – das Graben eines Tunnels und das Wegbringen des Materials durch Ameisen – und das Explizieren von Modellannahmen ermöglichen die Erarbeitung eines Prognosewerts. Die Nützlichkeit und Mächtigkeit einer lokalen linearen Betrachtung zeigt, wie wichtig Modellierung in der Analysis ist.

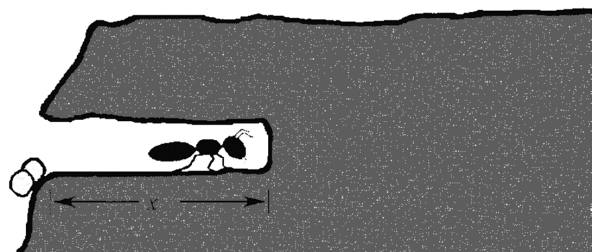


Abbildung 4. Vorgang des Tunnelbaus einer Ameise (Danckwerts & Vogel 2001, S. 61)

Die in den ISTRON-Bänden enthaltenen (realen) Probleme zeichnen sich v.a. durch stoffdidaktische Überlegungen und entsprechende Aufbereitungen für Lehrkräfte aus. Man kann darin vielfältige interdisziplinäre Ansätze entdecken,

damit eine Auseinandersetzung mit der entsprechenden Thematik nicht nur oberflächlich erfolgt, sondern das jeweilige Problem auch in der Tiefe durchdrungen werden kann. Sinnvolle Erweiterungen, die Reflexion und auch Überlegungen zu den Grenzen von mathematischen Modellierungen sollen für die interessierten Leser/innen unmittelbar erkennbar sein. Um alle besonders interessanten und wichtigen ISTRON-Beiträge nochmals aufzugreifen, wird es im anstehenden Jubiläums-Jahr 2016 einen „Best-of-Band“ aus 25 Jahren ISTRON geben.

Die ISTRON-Gruppe hat sich neben Anwendungen, Realitätsbezügen und Modellierung stets auch mit anderen aktuellen Themen des Mathematikunterrichts auseinandergesetzt. So gab es schon im Jahr 2000 einen umfassenden Band in der ISTRON-Schriftenreihe, der sich ausschließlich Computer-Anwendungen widmet. Allerdings sollte der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht nicht als eigenständige Zielsetzung angesehen werden, vielmehr sollte die Verbindung von digitalen Werkzeugen und Realitätsbezügen in den Vordergrund gestellt werden. Insbesondere wurde auf die Gefahr hingewiesen, dass es „statt zu einem verstärkten Einbezug von Anwendungen der Mathematik in den Mathematikunterricht durch den Rechner nur zu einer rechnergestützten Angewandten Mathematik im Mathematikunterricht kommen könnte.“ (Förster, Henn & Meyer 2000).

Der wissenschaftliche Diskurs ist in der ISTRON-Gruppe genauso wichtig wie die schulpraktische Aufbereitung exemplarischer Probleme. Dem widmet sich die Gruppe insbesondere bei den Herbsttagungen in den internen Treffen. Neben aktuellen Promotionsprojekten wird auch über Erkenntnisse aus Studien zum mathematischen Modellieren oder über Modellieren in den Bildungsstandards diskutiert. In diesem Rahmen entstehen immer wieder Ideen, welche dann weiter beforscht und in Publikationen oder auf Tagungen auch außerhalb von ISTRON präsentiert werden. Im Rahmen der GDM-Tagungen findet jährlich ein ISTRON-Treffen statt, in dem in Form eines 90-minütigen Kolloquiums in zwei Vorträgen aktuelle Forschungserkenntnisse präsentiert und diskutiert werden.

Auch die Begrifflichkeiten haben sich im Laufe der 25 Jahre, in denen es die ISTRON-Gruppe nun gibt, fortentwickelt. Unter „Anwendungen und Modellieren“ versteht man alle Aspekte von Beziehungen zwischen Mathematik und Realität. Verwendet man den Begriff „Anwendungen“, spricht man eher die Richtung von der Mathematik zur Realität an, während „Modellieren“ eher die umgekehrte Richtung von der Realität zur Mathema-

tik kennzeichnet (vgl. Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Greefrath 2015).

Über interessierte Personen, die gerne im Bereich des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts mitwirken möchten, freuen wir uns immer. So möchten wir auch die Gelegenheit nutzen und an dieser Stelle auf die nächste Zusammenkunft der ISTRON-Gruppe auf der GDM-Tagung in Heidelberg hinweisen. Dort wird es zwei Vorträge von Mitgliedern der Gruppe geben. Johanna Rellensmann und Stanislaw Schukajlow werden Ergebnisse aus einer qualitativen Studie präsentieren, die untersucht, inwiefern Skizzen und andere Visualisierungen beim Modellieren hilfreich sein können und den Lösungsprozess beeinflussen. Ein weiterer Vortrag wird sich dem Thema der mathematischen Modellierung in der Grundschule widmen. Katharina Skutella und Katja Eilerts beforschen diese Thematik, die bislang eher stiefmütterlich behandelt wurde, obwohl mit Modellierungsaktivitäten bereits in der Grundschule begonnen werden sollte.

Falls Sie mehr Informationen zu ISTRON wünschen, surfen sie doch einfach online vorbei. Auf der Homepage von ISTRON (www.istron-gruppe.de) finden Sie neben genaueren Informationen zur Schriftenreihe auch Informationen zu den aktuellen Tagungen. Haben Sie Interesse, bei ISTRON mitzumachen? Wir freuen uns, wenn Sie uns ansprechen.

Literatur

- Bardy, P., Danckwerts, R. & Schornstein, J. (Hrsg., 1996). *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 3*. Hildesheim: Franzbecker.
- Blum, W. (Hrsg., 1993). *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Böer, H. (1993). Extremwertproblem Milchtüte. Eine tatsächliche Problemstellung aktueller industrieller Massenproduktion. In W. Blum (Hrsg.), *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, S. 1–16.
- Danckwerts, R., Vogel, D. (2001). Ameisen und die Ableitung. In H. Abel, M. Klika & T. Sylvester (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 7*. Hildesheim: Franzbecker, S. 61–68.
- Förster, F., Henn, H.-W. & Meyer, J. (Hrsg., 2000). *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 6*. Hildesheim: Franzbecker.
- Henn, H.-W. (2007). „Meinen Bogen setze ich in die Wolken . . .“ Der Regenbogen im Mathematikunterricht. In W. Herget, S. Schwehr & R. Sommer (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 10*. Hildesheim: Franzbecker, S. 47–62.
- Jahnke, T. (1997). Stunden im Stau – eine Modellrechnung. In W. Blum, G. König & S. Schwehr (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 4*. Hildesheim: Franzbecker, S. 70–81.
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand

(Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 357–383.

Werner Blum, Universität Kassel, FB 10 – Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, 34109 Kassel

Gilbert Greefrath, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Fliednerstraße 21, 48149 Münster

Hans-Stefan Siller, Universität Koblenz-Landau, Mathematisches Institut, Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz

E-mail: istron@uni-koblenz.de. www.istron-gruppe.de

Eine Lobby für besseren Mathematikunterricht in Österreich Erinnerungen an die Gründung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich

Jürgen Maaß

Vor etwa 20 Jahren habe ich die Initiative ergriffen, den ersten regionalen und nicht thematisch orientierten Arbeitskreis der GDM zu gründen. Ich danke dem Schriftführer der GDM für die Möglichkeit, einige subjektive Erinnerungen und Thesen dazu für die GDM Mitteilungen aufzuschreiben. Ebenso wie die vielen Einladungen zur Mitarbeit in diesem Arbeitskreis der GDM verstehe ich diesen Text als Einladung, ausgehend von Erinnerungen an die Gründungszeit über aktuelle Ziele und Aktivitäten zu diskutieren. Die besten Momente hatte der Arbeitskreis, wenn es gelungen ist, die durchaus verschiedenen Ansichten und Standpunkte im Arbeitskreis offen zu diskutieren, auch wenn es keinesfalls immer gelungen ist, zu gemeinsamen Auffassungen zu gelangen.

Ausgangspunkt

Aus meiner Sicht war und ist es dringend notwendig, in Österreich eine Lobby für besseren Mathematikunterricht zu betreiben. Es ging und geht mir bei diesem für die GDM untypischen Arbeitskreis darum, nicht nur auf wissenschaftlichem Niveau fachdidaktische Forschungsergebnisse auszutauschen bzw. ihre Erarbeitung gemeinsam zu durchdenken und voranzutreiben, sondern auch gezielt und möglichst wirkungsvoll die Voraussetzungen dafür zu verbessern, dass all die guten fachdidaktischen Ideen und Konzepte für besseren Mathematikunterricht, die in Österreich und anderswo entwickelt wurden und werden, auch tatsächlich unterrichtswirksam werden können. Dazu gehört in Österreich insbesondere auch der Ver-

such, auf die bildungspolitischen Rahmenbedingungen Einfluss zu nehmen. Für all diejenigen Leserinnen und Leser, die sich in Österreich nicht so gut auskennen, merke ich an dieser Stelle an, dass es hierzulande keine andere Lobby für besseren Mathematikunterricht gibt, also etwa eine Vereinigung von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern, die eine solche Aufgabe wahrnehmen könnte.

Nachdem der damalige Vorstand der GDM sich besorgt erkundigte, ob mit diesem Arbeitskreis die Absicht verbunden sei, gemeinsam aus der GDM auszutreten und dazu ein klares NEIN gehört und geglaubt hat, gab es von Seiten der GDM auch offiziell grünes Licht für diesen Arbeitskreis. Damals wie heute ist aus meiner Sicht völlig klar, dass die Ziele dieses Arbeitskreises weitaus besser zu erreichen sind, wenn er ein Arbeitskreis *in* der GDM ist und bleibt. Ebenso unstrittig ist, dass dieser Kreis für sich und nicht für die ganze GDM zu österreichischen Themen Stellung bezieht; seit der Anfangszeit half der GDM Vorstand bei der Formulierung von öffentlichen Stellungnahmen.

Am Anfang war der Streit

Wer eine Lobby gründen und betreiben will, muss auf Widerspruch gefasst sein. Ich erinnere hier an einige der z. T. heftigen und sehr emotionalen Diskussionen aus der Gründungszeit, weil sie aus meiner Sicht nicht nur historisch im Sinne von Vereinsgeschichte interessant sind.

Während die GDM als Organisation heute ganz selbstverständlich bildungspolitische Stellungnah-

men erarbeitet und veröffentlicht, war und ist das im Österreich AK der GDM z.T. auch heute noch umstritten. Die beiden Hauptgegenargumente waren und sind: „Wir können ohnehin keinen Einfluss ausüben – sparen wir uns die Mühe“ und „das ist nicht unsere Aufgabe – wir sind Wissenschaftler“.

Anknüpfend an dieses zweite Argument ergab sich auch eine heftige Gegenwehr gegen mein Bestreben, den Österreich AK der GDM nicht auf an einer Universität beschäftigte, mindestens promovierte Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker zu beschränken, sondern auch die Kolleginnen und Kollegen einzubinden, die an pädagogischen Hochschulen (PHs) arbeiten, sowie möglichst auch fachdidaktisch engagierte Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer. Im Zusammenhang mit diesem Streit erinnere ich mich an viele unerfreuliche Szenen; er ist aber mittlerweile zumindest im Hinblick auf die pädagogischen Hochschulen entschieden – die 2015 in Basel gewählte erste Sprecherin des AK arbeitet an der PH Niederösterreich, die zuvor amtierende zweite Sprecherin war an der PH Wien tätig.

Auch ein anderer Streit aus der Gründungszeit ist mittlerweile beigelegt. Welcher? Über viele Jahre war Sinn und Zweck des Arbeitskreises so umstritten, dass von einigen Mitgliedern seine Auflösung gefordert wurde.

Die Lobby wird sichtbar – erste Erfolge

Unterstützt vom damaligen 2. Sprecher des AK, Manfred Kronfellner (auch an dieser Stelle: Herzlichen Dank, lieber Manfred! Selbstverständlich gilt mein Dank auch allen anderen, die den Arbeitskreis aktiv zum Erfolg getragen haben, insbesondere Stefan Götz, der ebenfalls einige Jahre Sprecher war.) gelang es recht bald, einen Termin beim Sektionschef des BMUKK (ins Deutsche übersetzt: der ranghöchste Beamte für Angelegenheiten der Gymnasien im Unterrichtsministerium) zu bekommen, um den Arbeitskreis und seine Anliegen vorzustellen und gleich ein paar aktuelle Fragen anzusprechen. Das war ein für alle am Gespräch Beteiligten sehr lehrreiches Gespräch. Der Sektionschef hatte ein Gespräch nach einem ihm gut vertrauten Muster erwartet: Wissenschaftler kamen und kommen zu ihm, um mit eindringlichen Worten auf ein Problem (in heutiger Sprechweise: eine Herausforderung) für Schulen bzw. das Bildungssystem hinzuweisen. Selbstverständlich verbinden sie diesen Hinweis mit einem Lösungsvorschlag, also einem Antrag auf Finanzierung eines Projektes, zu dessen Durchführung sie sich freundlicher Weise bereit erklären. Wir hatten als Neulinge in dieser Szene zwar neben unserer Selbst-Vorstellung als Lob-

by eine lange Liste von Herausforderungen, aber keinen Projektantrag. Deshalb verstanden wir auch die mehrfache Frage des Sektionschefs nach unserem eigentlichen Anliegen nicht richtig. Rückblickend war das eine verpasste Chance, auch wenn der Lobby-Anspruch tatsächlich dazu führte, dass ich als Sprecher des AK mehrfach aus dem Ministerium angerufen wurde, um als Lobbyist für den Mathematikunterricht (z.B. gegen Stundenkürzungen im Lehrplan, für die Etablierung und Aufwertung von Mathematik als Maturafach in BHS etc.) sprechen zu können.

Wechselseitige Information – der größte Erfolg?

Neben Einzelerfolgen als Lobby sind aus meiner Sicht neben der letztendlich doch gelungenen Öffnung des Arbeitskreises in Richtung pädagogische Hochschulen die mittlerweile zur Selbstverständlichkeit gewordenen wechselseitigen Informationen über die Situation an den verschiedenen Standorten der LehrerInnenbildung in Österreich das Wichtigste. Vor dem Start des Arbeitskreises gab es Informationen (und Geld für Stellen und Projekte) von der Regierung nur für diejenigen, die direkten Kontakt in die Ministerien hatten. Informationsaustausch der MathematikdidaktikerInnen untereinander fand höchstens zufällig am Rande von Konferenzen oder anderen Begegnungen statt. Auch nach Gründung des Arbeitskreises wurden alle bedeutenden Projekte etc. ohne Beteiligung des Arbeitskreises vergeben (vgl. oben: das dem Sektionschef vertraute Muster, welches eine Aufwertung des AK wäre es hingegen, wenn er über Gelder zur Forschungsförderung entscheiden könnte!); ein einziger Versuch, ein gemeinsames Projekt zur Evaluation der LehrerInnenausbildung zu starten, scheiterte vor einigen Jahren. Aber jetzt wissen alle, die sich am Arbeitskreis beteiligen, wenigstens in etwa (soweit darüber informiert wird), was an den einzelnen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen vor sich geht – z.B. im Hinblick auf die Umsetzung von Gesetzen zur aktuellen Reform der LehrerInnenausbildung. Von den vielen anderen Themen, die im AK mit dem Ziel wechselseitiger Information und gemeinsamer Willensbildung diskutiert wurde, erwähne ich exemplarisch einige Stichworte (mehr dazu ist in den vielen Protokollen nachzulesen): TIMSS und PISA, Standards, IMST, Bologna – Prozess, Lehrpläne und Haus der Mathematik in Wien.

Ausblick

Die meisten der KollegInnen, die an der Gründungssitzung des Arbeitskreises teilgenommen

haben, sind mittlerweile aus Altersgründen nicht mehr aktiv. Nur einige Stellen wurden nachbesetzt – die Anzahl der aktiven habilitierten MathematikdidaktikerInnen in Österreich ist leider gesunken. Trauer um die Verstorbenen und wehmütige Erinnerungen an die guten Momente des Arbeitskreises mischen sich nun mit der Freude darüber, dass der Arbeitskreis deutlich gewachsen ist so-

wie mit der Hoffnung, dass er mit der Energie und dem Engagement insbesondere der neuen Mitglieder weitere Erfolge als Lobby für besseren für besseren Mathematikunterricht in Österreich erringen wird.

Jürgen Maaß, Universität Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenberger Straße 69, 4040 Linz, Österreich, Email: juergen.maasz@jku.at

Medialitätsbewusstsein als Ziel von Medienbildung

Wolf-Rüdiger Wagner

Das Thema Medienbildung wurde in den GDM-Mitteilungen von Horst Hischer schon mehrmals aufgegriffen (GDM-Mitteilungen 93/2012, S. 23–27 und GDM-Mitteilungen 95/2013, S. 15–24). In der allgemeinen Diskussion über Medienbildung spielt Mathematik ebenso wie die naturwissenschaftlichen Fächer im besten Fall eine Nebenrolle – und dies dann vor allem mit Blick auf die Neuen Medien und ihren Einsatz als Werkzeuge im Unterricht.

Diese partielle Blindheit erklärt sich nicht zuletzt durch die bislang nahezu ausschließliche Orientierung der Medienpädagogik an der Diskussion in der Kommunikationswissenschaft. Stellt man jedoch, wie dies in den Medien- und Kulturwissenschaften der Fall ist, die Frage nach dem „konstitutiven Anteil der Medien an der Generierung, Speicherung und Übermittlung von Information und Wissen“ (Wissenschaftsrat 2007, 76), eröffnet dies eine andere Perspektive auf Medien. Es wird deutlich, welche entscheidende Rolle Medien als Werkzeuge der Weltaneignung für die Entwicklung in der Mathematik, den Naturwissenschaften und der Technik spielten und spielen. Dieser Beitrag¹ ist ein Plädoyer für einen Perspektivwechsel, um im Sinne der eingangs erwähnten Diskussionsanstöße darauf aufmerksam zu machen, dass die Mathematik aus ihrem fachdidaktischen Selbstverständnis einen Beitrag zur Medienbildung leisten sollte.

Grundvoraussetzung: Die „universelle Medialität unserer Weltzugänge“

Unser unmittelbarer Wahrnehmungs- und Kommunikationshorizont ist räumlich und zeitlich begrenzt. Ebenso verfügen wir aufgrund unserer organischen Ausstattung nur über eine begrenzte Speicher- und Verarbeitungskapazität für Informationen. Im Vergleich mit anderen Lebewesen stoßen wir nicht nur auf Unterschiede, sondern auch auf die Grenzen unserer Wahrnehmungsmöglichkeiten. Dies verweist auf die Medialität unserer unmittelbaren Zugänge zur „Welt“, d. h. auf die Abhängigkeit unserer Weltwahrnehmung von der Leistungsfähigkeit unserer Sinnesorgane und den Verarbeitungsmechanismen unseres Gehirns. Wollen wir die durch unsere organische Ausstattung gesetzten Grenzen überschreiten, sind wir auf Medien angewiesen.

Im Alltag funktioniert unsere Wahrnehmung, also der Prozess, in dem aus Reizen der Umwelt Informationen gewonnen und verarbeitet werden, in der Regel problemlos und zuverlässig. Es wird uns dabei nicht bewusst, dass die Sinnesorgane kein „Bild der Welt“, sondern nur „Realitätsausschnitte“ liefern, da sie nur bestimmte Eindrücke aufnehmen und im Abgleich mit abgespeicherten Schemata nur die Informationen verarbeiten, die der Orientierung in der Umwelt dienen. Die „Welt“, wie wir sie wahrnehmen, ist nicht mit der physikalischen Welt oder der „Realität“ gleichzusetzen. Auch mit Hilfe der Medien erschließen wir

¹ In dem Beitrag werden Überlegungen aus meinem Buch „Bildungsziel Medialitätsbewusstsein: Einladung zum Perspektivwechsel in der Medienbildung“ (München 2013) aufgegriffen und weiterentwickelt. Wörtliche Übernahmen werden nicht im Einzelnen als Zitate ausgewiesen.

uns nicht die „Realität“, sondern jeweils spezifische Aspekte der „Realität“. Auszugehen ist also von der „universellen Medialität unserer Weltzüge“. (Seel 1998, S. 245)

Aus der internen Verbindung von Medialität und Realität folgt [...] nicht, alle Wirklichkeit sei im Grunde eine mediale Konstruktion. Es folgt lediglich, daß es mediale Konstruktionen sind, durch die uns oder überhaupt jemandem so etwas wie Realität gegeben oder zugänglich ist. (Seel 1998, 255)

Das naive Vertrauen in unsere unmittelbare Wahrnehmung ist im Alltag sinnvoll, um unsere Handlungsfähigkeit sicherzustellen. Der reflektierte Umgang mit Medien erfordert jedoch Medialitätsbewusstsein, da wir hier mit Konstruktionen von Wirklichkeit konfrontiert werden, die über unsere Wahrnehmungsmöglichkeiten hinausgehen bzw. sich grundsätzlich davon unterscheiden. Die Vermittlung von Medialitätsbewusstsein zielt auf die Einsicht, dass Medien nie Wirklichkeit, sondern nur jeweils medienpezifisch konstruierte und inszenierte Wirklichkeitsausschnitte liefern. Dabei geht es nicht um Abweichungen der „Medienrealität“ von der „Realität“, sondern um die jeweils spezifischen medialen Zugänge zur „Realität“.

Unter „Medialität“ wird im Anschluss an den Gebrauch des Begriffs in den Medienwissenschaften der „konstitutive(n) Anteil der Medien an der Generierung, Speicherung und Übermittlung von Informationen und Wissen“ verstanden. Es stellt sich damit die Frage „wie Medien dazu beitragen, das mit zu schaffen, was sie bloß zu vermitteln scheinen“ (Wissenschaftsrat 2007, S. 76).

In den Geisteswissenschaften und in der Philosophie ging man lange Zeit nahezu übereinstimmend von der „Neutralität des Medialen gegenüber der Essenz von Geist, Sprache, Interpretation und Kultur“ aus. (Krämer 2004b, 22) Man meinte, sich mit Inhalten und Botschaften auseinanderzusetzen zu können, ohne ihre mediale Darstellung thematisieren zu müssen. Die dabei in den Blick geratenden Artefakte und Verfahren schienen im besten Fall aus technischer Sicht von Interesse zu sein.

Wenn im Zusammenhang von Schreiben, Lesen und Rechnen von Kulturtechniken die Rede war, konzentrierte man sich – trotz des Begriffs „Kulturtechnik“ – auf den Anteil der „Kultur“, von deren Produkten man meinte, sie allein auf die Ergebnisse geistiger Anstrengungen und Bemühungen zurückführen zu können. Diesem Kulturbegriff entspricht die Vorstellung, Sinn existiere im „Urzustand mediumfrei“. Dem gegenüber ist festzuhalten,

daß Sinn sich stets der Einschreibung in Medien verdankt und daß die Medialität zum Sinn nicht erst nachträglich und äußerlich hinzukommt, sondern von Anfang an für den Sinn konstitutiv ist, daß sie produktive Bedeutung für die Sinnprozesse hat. (Welsch 1997, 27)

In diesem Sinne zielt die Vermittlung von Medialitätsbewusstsein auf die Einsicht, dass Medien nie „Wirklichkeit“, sondern nur jeweils medienpezifisch konstruierte und inszenierte Wirklichkeitsausschnitte liefern. Wie wichtig die Vermittlung von Medialitätsbewusstsein ist, ergibt sich daraus, dass es keine „Botschaften“ bzw. keinen „Sinn“ unabhängig von einer medialen Form gibt. „Sinn“ ist immer an eine mediale Form gebunden, die an der „Sinnproduktion“ beteiligt ist.

Medien als Kulturtechniken

Durch ihre Beteiligung an der „Sinnproduktion“ werden Medien zu „kulturrelevanten und kulturverändernden Instanzen“. (Klook 1995, 57) Erst dieser Blick auf Medien begründet die Forderung nach Medienbildung als einem integralen Bestandteil der Allgemeinbildung. Zentral für dieses Verständnis von Medien ist der Begriff der Kulturtechnik. (vgl. Siegert 2009, 20)

Der Begriff Kulturtechnik bezieht sich sowohl auf planvolle und zielgerichtete Verfahrensweisen als auch auf Technik im Sinne „physikalischer Artefakte“. Beide Aspekte sind nicht voneinander zu trennen, wenn es um die Erweiterung unserer Möglichkeiten zur Informationsgewinnung und -verarbeitung, also um Medien als Werkzeuge der Weltaneignung geht. Mit dem Begriff Kulturtechnik rücken Praxis-Aspekte ins Zentrum des Interesses.

Medien werden dann als Kulturtechniken beschreibbar, wenn die Praktiken rekonstruiert werden, in die sie eingebunden sind, die sie konfigurieren oder die sie konstitutiv hervorbringen. (Schüttpelz 2006, 1)

Aus dieser Perspektive kann an die Stelle der nicht zufriedenstellenden, sondern eher verwirrenden Versuche, den Gegenstandsbereich der Medienbildung durch die Benennung von Apparaten und System zu bestimmen, die Frage nach den Handlungen und Praktiken treten, in deren Kontext Medien zu Kulturtechniken, d. h. zu Werkzeugen der Weltaneignung werden.

Zu den wichtigen Akten der Informationsgewinnung und -verarbeitung zählen Sichtbarmachen, Darstellen, Speichern, Kommunizieren, Messen, Sammeln, Klassifizieren, Analysieren, Vergleichen, Visualisieren, Modellieren und Simulieren.

Nur auf den ersten Blick handelt es sich dabei um eine Aneinanderreihung disparater Begriffe.

An konkreten Beispielen zeigt sich sofort, dass die Prozesse, in denen Wissen generiert, distribuiert und kommuniziert wird, nicht auf einzelne Verfahren zu reduzieren sind, sondern dass es immer um eine Vernetzung verschiedener Verfahren geht.

Als Robert Hooke und Antoni van Leeuwenhoek mit der Erforschung des Mikrokosmos begannen, konfrontierte der Blick durch das Mikroskop den Betrachter mit völlig neuen und ungewohnten Bildern. Mit diesen Bildern und Eindrücken blieb der Betrachter erst einmal allein. Da sich die einzelnen Mikroskope bis um 1900 in ihren Abbildungseigenschaften unterschieden, begrenzte dies zudem die Möglichkeit, Befunde intersubjektiv zu überprüfen. Dies fiel umso mehr ins Gewicht, als die Vertrauenswürdigkeit des „neuen Sinnesorgans“ nicht unumstritten war.

Damit das Mikroskop für Medizin und Biologie zu einem zentralen Medium werden konnte, musste der einsame Blick des Forschers auf das Präparat durch die Möglichkeit ergänzt werden, die mikroskopischen Befunde zu kommunizieren. Sprachliche Beschreibungen und Zeichnungen sind hierfür allein nicht geeignet, da sie subjektiv gefärbt sind und das Objekt nicht in seinem Detailreichtum wiedergeben können. Erst die fotografische Reproduktion mikroskopischer Befunde ermöglichte die zeitunabhängige Begutachtung durch mehrere Personen. Zudem lassen sich mikroskopische Objekte anhand der fotografischen Reproduktion präziser messen und auswerten als bei der direkten mikroskopischen Beobachtung. Nicht zuletzt kann man Fotografien sammeln und vergleichen. Allerdings liefert auch die Fotografie keine Selbstabbildung der Wirklichkeit. Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass die technische Aufrüstung des Blicks durch das Mikroskop mit Hilfe der Fotokamera die Abhängigkeit von der Technik nicht aufhebt, sondern eher verdoppelt.

Kein Bild, sei es zeichnerischer, mechanischer, fotografischer oder digitaler Art, gibt nur passiv wieder, sondern trägt immer auch ein konstruktives Element in sich [...]. (Bredenkamp & Brons 2004, 378)

Aufschreibsysteme als Grundlage der Wissensproduktion

Nach dem französischen Wissenssoziologen Bruno Latour kommt „Inskriptionen“ eine zentrale Rolle für die dynamische Entwicklung von Wissenschaft und Technik in der europäischen Neuzeit zu. Von „Inskriptionen“ spricht er, wenn Aufzeichnungen

„mobil, aber auch unveränderlich, präsentierbar, lesbar und miteinander kombinierbar sind“. (Latour 2006, S. 266) Zur Erzeugung von „Inskriptionen“, die diese Eigenschaften aufweisen, benötigt man komplexe Instrumente und Methoden (Latour 2006, 264 f.), also Kulturtechniken.

Prototypisch für diesen Medien- bzw. Aufzeichnungstyp stehen Landkarten. Landkarten machen, indem sie raum-zeitliche Informationen visualisieren, „Unsichtbares sichtbar“. (Krämer 2008, 323) Sofern sie nach festgelegten Projektionsregeln gezeichnet wurden, konnten sie detailgetreu, in unterschiedlichen Größen reproduziert werden. Diese Karten konnten gesammelt und archiviert, einem Publikum präsentiert und mit weiteren Informationen kombiniert werden. Ein Beispiel hierfür liefern Seekarten, auf denen Seewege, Küsten, Strömungsverhältnisse, Windrichtungen, Untiefen, Seezeichen, Fahrrinnen etc. eingetragen sind. Durch die „kartografische Digitalisierung“ und die damit möglich gewordene Georeferenzierung von Daten entstehen heute

Wissenslandschaften [...], die überhaupt nicht mehr anders gegeben und zugänglich sind als durch Medien. (Krämer 2008, 332)

Zu solchen mobilen und unveränderlichen „Inskriptionen“ zählen nicht zuletzt auch maßstabgetreue Zeichnungen. Eine Voraussetzung für die Skalierbarkeit und Geometrisierbarkeit von Modellzeichnungen war die Entdeckung der Zentralperspektive in der Renaissance und damit verbunden die Entwicklung der darstellenden Geometrie. Technische Zeichnungen machten Wissen extern, d. h. personenunabhängig, speicher- und transportierbar, weil Objekte

nun gedreht und verschoben werden konnten und dennoch dieselben blieben. Perspektive erzeugt optische Konsistenz. So können auf den Drucken von Georg Agricola Objekte in separaten Teilen dargestellt werden oder in Explosionszeichnungen oder auf demselben Blatt Papier in verschiedenen Maßstäben, Winkeln und Perspektiven. (Siegert 2009, S. 22)

Maßstabgetreue Modellzeichnungen waren zwar keine zwingende Voraussetzung für die Konstruktion komplizierter Maschinen, lieferten aber Anleitungen für den Nachbau von Maschinen und Geräten. Die Zunftmeister sahen darin eine Bedrohung ihres Informationsmonopols, zumal es durch den Buchdruck möglich wurde, identische Abbildungen in größerer Auflage zu verbreiten.

In China wiederum stießen die technischen Zeichnungen eher auf Desinteresse. Über die Jesuiten, die im 17. Jahrhundert als Missionare nach

China kamen, kannte man in China maßstabgetreue Modellzeichnungen, z. B. aus Agricolas Abhandlung zur Metallkunde. Da in der chinesischen Kultur jedoch kein Interesse an derartigen Verfahren zur personen- und kontextunabhängigen Informationsvermittlung bestand, tauchen in zeitgenössischen chinesischen Büchern zwar die Maschinen und Gegenstände aus den europäischen Büchern auf, aber ohne dabei die technischen Darstellungsformen zu übernehmen. (Edgerton 1991, 273 und 280)

Perspektivisches Zeichnen und die Anfertigung von Modellzeichnungen setzt demnach nicht nur technische Fertigkeiten, sondern auch ein kulturell definiertes Interesse voraus. Der Begriff Kulturtechnik verweist darauf, dass Techniken nicht isoliert werden können von kulturellen Programmen, Normierungen, Werten und Ideen. Einerseits materialisieren sich in den Medien Konzepte zur Aneignung von Wirklichkeit, andererseits verstärkt die Medientechnik bestimmte Formen der Wirklichkeitsaneignung. Aussagen über Medien bleiben dabei immer relativ. Sie können sich nur auf die Funktion der Medien in dem jeweils dominierenden Programm zur Aneignung von Welt und auf den Vergleich zu anderen Medien beziehen.

Auszugehen ist also von der „wechselseitigen Konstitution von Wissensform und Medienfunktion“. (Scholz 2008, 5). Auch Alexander von Humboldt ging von einer Wechselwirkung zwischen wissenschaftlicher Theoriebildung und Medienentwicklung aus.

Der Uebergang des natürlichen zum telescopischen Sehen, welcher das erste Zehnttheil des siebzehnten Jahrhunderts bezeichnet und für die Astronomie (die Kenntniß des Weltraumes) noch wichtiger wurde, als es für die Kenntniß der irdischen Räume das Jahr 1492 gewesen war, hat nicht bloß den Blick in die Schöpfung endlos erweitert; er hat auch, neben der Bereicherung des menschlichen Ideenkreises, durch Darlegung neuer und verwickelter Probleme das mathematische Wissen zu einem bisher nie erreichten Glanze erhoben. So wirkt die Stärkung sinnlicher Organe auf die Gedankenwelt, auf die Stärkung intellectueller Kraft, auf die Veredlung der Menschheit. (von Humboldt 1850, 75)

Die grafische Methode als wissenschaftliches Verfahren und „kulturelle Wahrnehmungsform“

Das Medium arbeitet an der Art und Weise des Wissens mit. Jeder Medienwechsel bedeutet dabei eine Verschiebung des Wissens [...]. (Heßler u. a. 2005, S. 14)

Aus heutiger Sicht wird häufig übersehen, dass die Entwicklung von Fotografie und Film in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts in engem Zusammenhang mit dem wissenschaftlichen Interesse an Aufschreibesystemen zu sehen ist, die den Ansprüchen genügten, wie sie Latour für „Inskriptionen“ definierte. Mit der „grafischen Methode“, also der grafischen Darstellung von Daten, Sachverhalten oder Informationen, hoffte man die Hindernisse, die dem wissenschaftlichen Fortschritt entgegenstanden, „die Begrenztheit und Fehlerhaftigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmung sowie die Unzulänglichkeit der Sprache, die gefundenen Ergebnisse genau festzuhalten und eindeutig weiterzugeben“, zu überwinden. (Marey 1878, I)

Die Methoden zur grafischen Darstellung von Daten entwickelten sich mit der Verbreitung statistischer Methoden seit dem 17. Jahrhundert. Die Erfassung von Daten in Tabellen, Kurven oder anderen Darstellungsformen erlaubt nicht nur einen besseren Überblick, sondern kann auch Zusammenhänge und Regelmäßigkeiten aufdecken, beschreibt Entwicklungen und erleichtert Vergleiche. Über Klimaphänomene oder das Bruttosozialprodukt lassen sich ohne Statistiken keine Erkenntnisse gewinnen oder Aussagen treffen. Statistiken bzw. statistische Darstellungsformen zählen so zu den Kulturtechniken, die uns einen Zugang zu Dimensionen der Wirklichkeit eröffnen, die über sinnliche Wahrnehmung nicht zu erfassen sind. Die Darstellung komplexer Phänomene in Graphen und Diagrammen setzt immer medienbasierte „wissenschaftliche Fundamentalakte“ wie das Messen, Erfassen und Ordnen von Daten voraus. (Böhme 2004, 227)

Im Unterschied zu volkswirtschaftlichen und vergleichbaren Statistiken müssen in den experimentellen Wissenschaften die Daten über Aufzeichnungsgeräte auf mechanischem Weg erfasst und dargestellt werden. Die Geschichte der grafischen Methode ordnet sich ein in die Geschichte der exakten Messmethoden. Technikgeschichtlich kann man bis zu Watts Druckschreiber zurückgehen.

Der französische Physiologe Étienne-Jules Marey zählt in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts zu den einflussreichsten Vertretern der „grafischen Methode“. (Marey 1878, I) Aus dem wissenschaftlichen Interesse heraus, die Grenzen der „mangelhaften Sinneswahrnehmungen“ zu überschreiten und die „Unzulänglichkeit der Sprache“ zu überwinden, entwickelte er verschiedene Mess- und Registrierverfahren, die mit einem Schreibstift und gleichmäßig bewegter Papierwalze arbeiteten. Dazu zählten u. a. Puls- und Herzschreiber. In diesen Maschinen zum Sammeln wissenschaftlicher Daten sah Marey neue Sinnesorgane. Die

von ihm entwickelte Chronophotographie, durch die die technischen Voraussetzungen für den Film geschaffen wurden, betrachtete Marey als die perfekte Anwendung der „grafischen Methode“. Durch die von Marey entwickelten Aufnahmetechniken wurden Bewegungsabläufe auf Punkte und Linien reduziert. Den Vorteil dieser Mess- und Registrierverfahren sah Marey darin, dass die Ergebnisse in einer grafischen Darstellung als Kurve zusammengefasst wurden, so dass die einzelnen Messergebnisse zeitlich einander zugeordnet, verglichen und ausgewertet werden konnten. (Marey 1894, 804)

Zum Zusammenspiel von Mathematik und optischen Instrumenten

Wie das Fernrohr, ein sinnliches näherndes, raumdurchdringendes Hilfsmittel, hat die Mathematik durch Ideenverknüpfung in jene fernen Himmelsregionen geführt, von einem Theil derselben sicheren Besitz genommen; ja bei Anwendung aller Elemente, die der Standpunkt der heutigen Astronomie gestattet, hat in unseren für Erweiterung des Wissens glücklichen Tagen das geistige Auge einen Weltkörper gesehen, ihm seinen Himmelsort, seine Bahn und seine Masse angewiesen, ehe noch ein Fernrohr auf ihn gerichtet war! (Alexander von Humboldt 1847, 246)

Humboldt bezieht sich hier auf ein Ereignis der Wissenschaftsgeschichte, in der die Mathematik ihre Eignung als Werkzeug zur Weltaneignung spektakulär unter Beweis stellte. Es geht um die Entdeckung des Planeten Neptun. Seit dem Anfang des 17. Jahrhunderts wusste man, dass sich die Planeten auf elliptischen Bahnen bewegen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht. Kepler hatte dieses nach ihm benannte Erste Keplersche Gesetz aus den Tabellen abgeleitet, in denen der dänische Astronom Tycho Brahe und später Kepler selbst die Daten aus langjährigen Beobachtungen und Messungen der Umlaufbahnen der Planeten, insbesondere des Planeten Mars, festgehalten hatten.

Newton hatte mit der Gravitationskraft, die von der Sonne auf alle Planeten in unserem Sonnensystem ausgeübt wird, die Erklärung dafür geliefert, warum die Planeten in ihrer Umlaufbahn gehalten werden und warum es durch die Gravitationswechselwirkung zwischen den Planeten zu Abweichungen von den idealen elliptischen Umlaufbahnen kommt.

Aufgrund solcher Abweichungen von den vorausgerechneten Bahnen der Planeten Jupiter, Saturn und Uranus waren Astronomen schon länger

von der Existenz eines noch unbekanntem Planeten ausgegangen. Der französische Mathematiker und Astronom Urbain Le Verrier berechnete 1846 die Position, auf der sich dieser unbekannt Planet befinden musste. Diese Berechnungen schickte er an die Königliche Sternwarte in Berlin, die durch die Initiative von Alexander von Humboldt über eines der leistungsstärksten Teleskope in der damaligen Zeit verfügte. Als die Berliner Astronomen ihr Teleskop auf die von Le Verrier berechnete Position richteten und das sich ihnen bietende Bild mit einer aktuellen Sternkarte verglichen, gelang es ihnen sofort, den bis dahin unbekanntem Planeten zu identifizieren und damit den Beweis für Le Verriers Berechnungen zu führen.

Selbstverständlich hatte die Mathematik schon lange zuvor den Nachweis ihrer „Mächtigkeit“ als Werkzeug der Weltaneignung erbracht. Man denke nur an die Bedeutung der Astronomie für die Positionsbestimmung auf See. Notwendig war nicht nur die Erstellung der Ephemeriden. In den Ephemeriden oder „Tageblättern“ bzw. „Tafeln“ war die tägliche Position der für die Navigation wichtigen Himmelskörper in stündlichem Abstand verzeichnet. Der Tübinger Professor Wilhelm Schickard hatte für seinen Freund Johannes Kepler die erste mechanische, zahnradgetriebene Rechenmaschine für die vier Grundrechenarten konstruiert, um ihm die komplizierten und umfangreichen Berechnungen, die für die Erstellung dieser Tafeln notwendig waren, zu erleichtern. Die an Bord der Schiffe durchgeführten Messungen mit Sextanten mussten wiederum mit Hilfe komplizierter Berechnungen, für die Logarithmentafeln zum unverzichtbaren Hilfsmittel wurden, mit den Daten aus den Ephemeriden abgeglichen werden.

Vom Zählen zum Rechnen, vom Schätzen zum exakten Wissen [...]. Mit diesen geistigen Werkzeugen machen wir die verborgenen Gesetze sichtbar, denen die Objekte um uns herum in ihrem Zyklen und Abweichungen folgen. (Kaplan 2003, 11)

Bildungsziel Medialitätsbewusstsein

Alles, was wir über die Welt sagen, erkennen und wissen können, das wird mit Hilfe von Medien gesagt, erkannt und gewußt. (Sybille Krämer 1998b, 73)

Da es keine „Selbstabbildung“ der Wirklichkeit gibt, lässt sich Medialitätsbewusstsein als übergeordnetes Ziel der Medienbildung definieren. Die Vermittlung von Medialitätsbewusstsein zielt auf die Einsicht, dass Medien nie Wirklichkeit,

sondern nur jeweils medienpezifisch konstruierte und inszenierte Wirklichkeitsausschnitte liefern. Medialitätsbewusstsein, also die Fähigkeit, medienpezifische Leistungen einschätzen, reflektieren und nutzen zu können, schafft die Voraussetzung für Medienkompetenz.

Die Frage nach der Medialität zeigt, wie verkürzt es wäre, Medienbildung vorrangig auf die Auseinandersetzung mit den Massenmedien und den Formen der computervermittelten Kommunikation zu beziehen. In den Bereichen von Technik, Naturwissenschaft und Medizin sowie in der Mathematik kommt Medien für die Aneignung von Welt eine mindestens ebenso große Bedeutung zu. Mit Blick auf die gesellschaftliche Relevanz der Entwicklung in diesen Bereichen sind insbesondere auch Mathematik und die naturwissenschaftlichen Fächer, die bislang nicht im Zentrum des medienpädagogischen Interesses standen, aufgerufen, ihren Beitrag zur Medienbildung durch Vermittlung von Medialitätsbewusstsein zu leisten.

Medien sollten auch dann als Gegenstand von Medialitätsbewusstsein in den Blick genommen werden, wenn sie in Lehr- und Lernzusammenhängen nur als didaktische Mittler eingesetzt werden. Dies betrifft sowohl ihren Einsatz zur Informationsvermittlung und zum handlungsorientierten Wissenserwerb als auch zum aktiven Kommunizieren und Präsentieren. Wenn es darum geht, Medialitätsbewusstsein zu vermitteln, muss dies insbesondere dort passieren, wo im Unterricht mit Medien gearbeitet wird.

Das Stichwort „handlungsorientierter Wissenserwerb“ verweist dabei darauf, dass die Vermittlung von Medialitätsbewusstsein – nicht zuletzt durch die Verfügbarkeit der Neuen Medien – über die ziel- und sachgerechte aktive Mediennutzung erfolgen kann.

Mit der Forderung nach Vermittlung von Medialitätsbewusstsein wird kein Auftrag von außen an Schule und Unterricht herangetragen, denn sowohl in den Bezugswissenschaften als auch in der fachdidaktischen Diskussion kommt der Auseinandersetzung mit der Frage, welchen konstitutiven Beitrag Medien zur Generierung und Vermittlung von Wissen leisten, ein zentraler Stellenwert zu. Wichtig wäre wahrzunehmen, dass Schule hier einen originären Beitrag zur Medienbildung zu leisten hat, zumal es sich hier um einen Bildungsauftrag handelt, der in dem fachdidaktischen Selbstverständnis der Fächer seine Begründung findet. Wenn Schule ihrem Bildungsauftrag gerecht werden will, muss sie Bewusstsein dafür schaffen, welche Bedeutung den Medien als Werkzeugen zur Weltaneignung zukommt.

Literatur

- Böhme, Hartmut (2004): Das Unsichtbare – Mediengeschichtliche Annäherungen an ein Problem neuzeitlicher Wissenschaft. In: (Krämer 2004a, 215–245).
- Bredenkamp, Horst & Brons, Franziska (2004): Fotografie als Medium der Wissenschaft – Kunstgeschichte, Biologie und das Elend der Illustration. In: Maar, Christa & Burda, Hubert (Hrsg.) (2004): *Iconic Turn. Die neue Macht der Bilder*, Köln: DuMont, 365–381
- Edgerton, Samuel Y. jr. (1991): *The Heritage of Giotto's Geometry: Art and Science on the Eve of the Scientific Revolution*. Ithaca und London: Cornell University Press
- Heßler, Martina, in Zusammenarbeit mit Hennig, Jochen und Mersch, Dieter (2004): Explorationsstudie im Rahmen der BMBF-Förderinitiative „Wissen für Entscheidungsprozesse“ zum Thema Visualisierungen in der Wissenskommunikation. <http://www.sciencepolicystudies.de/dok/explorationsstudie-hessler.pdf> (10. 10. 2008)
- Humboldt, Alexander von (1847): *Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung*. Bd. 2. Stuttgart und Tübingen. (Digitalisierte Fassung aus dem Deutschen Textarchiv: http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/humboldt_kosmos03_1850 (28. 11. 2015))
- (1850): *Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung*, Band 3. Stuttgart: Cotta. (Digitalisierte Fassung aus dem Deutschen Textarchiv: http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/humboldt_kosmos03_1850 (28. 11. 2015))
- Kaplan, Robert (2003): *Die Geschichte der Null*. München: Piper
- Kloock, Daniela (1995): *Von der Schrift- zur Bild(schirm)kultur*. Berlin: Wiss.-Verlag Spiess.
- Krämer, Sybille (Hrsg.) (1998a): *Medien, Computer, Realität. Wirklichkeitsvorstellungen und Neue Medien*. Frankfurt am Main: Suhrkamp
- (1998b): Das Medium als Spur und als Apparat. In: Krämer, Sybille (Hrsg.) (1998a), 73–94.
- (Hrsg.) (2004a): *Performativität und Medialität*. München: Wilhelm Fink Verlag.
- (2004b): Was haben „Performativität“ und „Medialität“ miteinander zu tun? Plädoyer für eine in der „Asthetisierung“ gründende Konzeption des Performativen. In: (Krämer 2004a), 13–32.
- (2008): *Medium, Bote, Übertragung. Kleine Metaphysik der Medialität*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Latour, Bruno (2006): *Drawing Things Together: Die Macht der unveränderlich mobilen Elemente*, in: Belliger, Andréa; Krieger, David J. (Hrsg.): *Anthology. Ein einführendes Handbuch zur Akteur-Netzwerk-Theorie*, transkript Verlag Bielefeld, S. 259–307.
- Marey, Étienne-Jules (1878): *La méthode graphique dans les sciences expérimentales et particulièrement en physiologie et en médecine*. Paris: Librairie de l'Académie Médecine.
- (1894): *La station physiologique de Paris (1)*. In: *La nature: revue des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie*, Jg. XXXI, S. 802–808.
- Seel Martin (1998): *Medien der Realität und Realität der Medien*. In: (Krämer 1998a), 244–268).
- Scholz, Sebastian [2008]: *Sichtbarkeit aus dem Labor: Mediengeschichtliche Anmerkungen zum epistemischen Bild*. (Vortrag im Rahmen der Jahrestagung der Gesellschaft für Medienwissenschaft „Was wissen Medien?“ 2.–4. Oktober 2008, Institut für Medienwissenschaft, Ruhr-Universität Bochum.) URL vom 28.11.2015: http://redax.gfmedienwissenschaft.de/webcontent/files/2008-abstracts/Scholz_EpistemischesBild_GfM2008.pdf
- Schüttpelz, Erhard (2006): *Die medienanthropologische Kehre der Kulturtechniken*. In: *Archiv für Mediengeschichte* No. 6: *Kulturgeschichte als Mediengeschichte (oder vice versa)?*, Weimar 2006. S. 87–110.

Siegert, Bernhard (2009): Weiße Flecken und finstre Herzen. Von der symbolischen Weltordnung zur Weltentwurfsordnung. In: Gethmann, Daniel & Hauser, Susanne (Hrsg.): Kulturtechnik Entwerfen. Praktiken, Konzepte und Medien in Architektur und Design Science. Bielefeld: transcript, 2009, 17–47.

Welsch, Wolfgang (1997): Medienwelten und andere Welten. In: Wolfgang Zacharias (Hrsg.): Interaktiv – Im Labyrinth der Möglichkeiten. Die Multimedia Herausforderung, kulturpädagogisch. Remscheid: Schriftenreihe der Bundesvereinigung Kulturelle Jugendbildung (BKJ), 1997, 25–36.

Wagner, Wolf-Rüdiger (2013): Bildungsziel Medialitätsbewusstsein: Einladungen zum Perspektivwechsel in der Medienbildung. München: kopaed.

Wissenschaftsrat (2007): Empfehlungen zur Weiterentwicklung der Kommunikations- und Medienwissenschaften in Deutschland. Oldenburg, 25. Mai 2007. <http://www.wissenschaftsrat.de/download/archiv/7901-07.pdf> (26. 11. 2015).

Wolf-Rüdiger Wagner, Rauschenplatstraße 26, 30659 Hannover, Email: wolfruedigerwagner@arcor.de

Schöne neue Mathewelt der österreichischen Zentralmatura 2015

Wolfgang Kühnel und Hans-Jürgen Bandelt

Die Aufgaben zur Mathematik in der neuen „standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung 2015“ in Österreich werden kritisch betrachtet. Besonderes Augenmerk wird darauf gelegt, welchen Klassenstufen sie zuzuordnen sind und ab welcher Klassenstufe man diese Klausur folglich bestehen kann. Es zeigt sich, dass schon die ersten 9–10 Schuljahre dafür ausreichen. Dies lässt nur den Schluss zu, dass auf diese Weise letztlich beabsichtigt ist, beim Fach Mathematik die Matura auf das Niveau des in Deutschland so genannten „mittleren Schulabschlusses“ nach 10 Schuljahren abzusenken, den es in Österreich in dieser Form allerdings nicht gibt.

1 Einleitung

Die Kompetenzorientierung soll nun auch in der österreichischen Matura zum Fach Mathematik eingeführt werden, nachdem es im vergangenen Jahr schon einen Probelauf gegeben hat (BIFIE 2015). Eine Reklamebroschüre zu diesem Thema gibt es schon seit 2011 (vgl. BIFIE 2011). Darin heißt es auf S. 109: „Jener Paradigmenwechsel, der erfolgen soll, besteht im Umdenken in Bezug auf Planung und Organisation des Unterrichts sowie bei der Erstellung oder Veränderung von Aufgaben.“ Soweit die theoretischen Vorstellungen – und wie sieht nun die Praxis der Aufgaben aus?

Die Zentralmatura 2015 im Fach Mathematik gliedert sich in einen Teil 1 und einen Teil 2 (Matura 2015). Der Teil 1 besteht aus 24 Aufgaben, die mit je einem Punkt bewertet sind. Der Teil 2 hat 4 textlastigere Aufgaben, die aus jeweils zwei bis vier Teilaufgaben (a, b, c, d) zusammengesetzt

sind, wobei jede Teilaufgabe mit zwei Punkten bewertet ist: Insgesamt sind es 12 Teilaufgaben, so dass auch in diesem Teil 24 Punkte erzielt werden können. Somit ist die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl gleich 48. Mit 16 (sic!) Punkten gilt die Klausur schon als bestanden. Diese müssen allerdings in Teil 1 zusammen mit speziell gekennzeichneten Teilaufgaben aus Teil 2 geholt werden. Insbesondere kann man mit Teil 1 allein 24 Punkte holen, was die Note „befriedigend“ zur Folge hat.

In Presseberichten wurde schon mitgeteilt, manche Schüler hätten sich deshalb nur auf den Teil 1 überhaupt vorbereitet (vgl. Kurier 2015). Angeblich testet der Teil 1 die „Grundkompetenzen“ und wurde in der Presse als relativ einfach bewertet, während Teil 2 als eher schwierig eingeschätzt wurde. Der große Textumfang der Aufgaben in Teil 2 wurde allerdings auch kritisiert: „Besonders für Schüler mit nicht deutscher Muttersprache war das schwierig“ – so wird eine Gymnasialdirektorin in Wien zitiert (Kurier 2015).

Die Aufgaben und ihre Zuordnung zu Klassenstufen

Im Folgenden bedeutet NMS die „Neue Mittelschule“ (vom Lehrplan her identisch mit der Unterstufe der AHS) und AHS n die n -te Klasse der AHS: In Deutschland (D) würden NMS und AHS 5 zusammen der Sek. I entsprechen, AHS n der Klasse $n + 4$ am G8-Gymnasium und $n + 5$ an der 9-jährigen Gesamtschule/Gemeinschaftsschule/Sekundarschule/Stadteilschule. Tabelle 1 gibt einen schnellen Überblick zu den Inhalten und

Anforderungen dieser Aufgaben. Wie man darin sieht, kann man mit der AHS 5 bereits 11 Punkte und mit der AHS 6 sogar 18 Punkte erhalten. Nach den deutschen Bildungsplänen könnte man am Ende vom 9. Schuljahr am Gymnasium 13 oder 14 Punkte erhalten und am Ende des 10. Schuljahres sogar 18 Punkte. Der Kern der gymnasialen Oberstufe (AHS 7–8, in Deutschland Klassen 11–12, ggfs. 13) wird zum Bestehen nicht gebraucht.

Die Aufgaben des Teil 2 sind in Tabelle 2 beschrieben, wobei jede Unteraufgabe getrennt klassifiziert ist. Das Symbol „A“ bedeutet, dass diese Unteraufgabe alternativ zu Aufgaben von Teil 1 auf die minimalen 16 Punkte angerechnet wird.

Allein mit dem Stoff der Mittelschule und mit AHS 5 kann man somit aus beiden Teilen 15 Punkte holen, mit AHS 6 sogar 26 Punkte und damit die Note „befriedigend“. Nur für die Noten „gut“ sowie „sehr gut“ muss man irgendetwas aus den letzten beiden Schuljahren kennen. Nach den deutschen Bildungsplänen könnte man am Ende der 9. Schuljahrs sogar 16 oder 17 Punkte erhalten und damit genug zum Bestehen. Am Ende des 10. Schuljahrs könnte man 29 oder mehr Punkte erhalten.

Wenn man in Aufgabe 1b die „mittlere Geschwindigkeit“ mit der elementaren und populären Formel „Länge des Weges dividiert durch die Zeit“ ermitteln dürfte, dann hätte man einen Punkt mehr nur mit der Mittelschulmathematik einschließlich AHS 5, also 16 statt 15 Punkte und damit die Klausur bestanden. Entsprechendes könnte man für Aufgabe 14 aus Teil 1 sagen, womit möglicherweise noch ein Punkt hinzukommen kann. Nur formal sind im Bildungsplan AHS Differenzenquotienten der AHS 6 zugeordnet, vermutlich dann aber solche in beliebigen Teilintervallen.

Mit der elementaren Erkenntnis, dass ein Viertel die Hälfte der Hälfte ist, kommt man leicht darauf, dass die doppelte Halbwertszeit diejenige Zeit sein muss, in der sich insgesamt der Bestand auf ein Viertel reduziert. Damit könnte man auch in Aufgabe 11 aus Teil 1 noch einen Punkt mehr nur mit der Mittelschulmathematik einschließlich Klasse 5 erhalten. Manches dabei ist vielleicht Ermessenssache, aber es ist wohl nicht übertrieben, folgendes festzustellen: Diese Klausur kann mit der Mittelschulmathematik einschließlich der des 9. Schuljahres insgesamt nicht nur nach deutschen, sondern möglicherweise auch nach österreichischen Bildungsplänen bestanden werden. Wenn man das 10. Schuljahr hinzunimmt, dann ist das Bestehen auf jeden Fall möglich, sogar mit der Note „befriedigend“.

Die Tabelle 3 zeigt, dass die Note „gut“ ohne jede Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. alternativ

ohne Differential- und Integralrechnung erreicht werden kann, wenn jeweils alles andere komplett richtig behandelt wird. Im Umkehrschluss folgt: Nur die Note „sehr gut“ verlangt Kenntnisse sowohl in der Differential- und Integralrechnung als auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Note „befriedigend“ kann ohne diese Teilgebiete erreicht werden und somit ohne die typischen Gebiete der gymnasialen Oberstufe, wenn man nur die Parameterdarstellung einer Geraden hinbekommt und all das, was der Sekundarstufe I entspricht.

Die schriftliche Matura kann sogar mit Kenntnissen nur in den Bereichen 1–4 bestanden werden. Da in Deutschland – anders als in Österreich – Bereich 3. eher der Oberstufe und Bereich 5 eher der Mittelstufe zuzuordnen ist, könnte man für Deutschland sagen: Die Klausur kann mit Kenntnissen nur in den Bereichen 1, 2, 4, 5 bestanden werden, was der Sekundarstufe I bis zur Klasse 9 am Gymnasium entspricht. Bei großzügiger Zuordnung zu einer gewissen „Alltagsmathematik“ könnte man sogar zu dem Schluss gelangen, dass diese allein bereits zum Bestehen ausreicht. Das würde dann aber z.B. die Halbwertszeit und elementare Wahrscheinlichkeiten mit einschließen. Dagegen konnten im Abitur der letzten Jahre in Nordrhein-Westfalen und Hamburg niemals Differentialrechnung, Integralrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und analytische Geometrie (bzw. Matrizenrechnung) gleichzeitig vermieden werden. Man konnte die erforderlichen Punkte zwar aus einem dieser Gebiete holen, aber nicht ausschließlich aus dem Stoff der Unter- und Mittelstufe. Interessant ist auch, dass die komplexen Zahlen in der Klausur gar nicht vorkommen, obwohl sie – anders als in Deutschland – explizit in den Bildungszielen für die Klasse 7 der AHS genannt sind (Bildungsplan AHS).

Realitätsbezug

Einige der Aufgaben aus Teil 1 sind übliche Sachaufgaben, insbesondere die die Grundrechenarten und Prozentrechnung betreffen (was wiederholt abgetestet wird), sowie Zerfallsprozesse. Allerdings könnte man Aufgabe 2 (Umrechnung von Fahrenheit-Graden in Celsius-Grade) als „Pippi-Langstrumpf-Aufgabe“ verspotten, denn diese Aufgabe steht in Schulbüchern für Klasse 8 in NRW. Diese Umrechnung von x zu $9x/5 + 32$ oder umgekehrt y zu $5(y - 32)/9$ hat wohl schon jeder einmal als Alltagsmathematik gesehen, sie steht vielleicht auch in Formelsammlungen. Insbesondere hat die Aufgabe 3 in der Presse und ihren Diskussionsforen heftigen Spott erfahren, da eine Grundrechenaufgabe mit Hilfe des Skalarproduk-

Tabelle 1. Aufgaben in Teil 1

Nr.	Aufgabenüberschrift	Mathematischer Inhalt	Stufe/ Klasse
1	Taschengeld	gewichtetes arithmetisches Mittel	NMS
2	Fahrenheit und Celsius	lineare Funktionen	AHS 5, NMS
3	Gehälter	Skalarprodukt von Vektoren im \mathbb{R}^n	AHS 8
4	Parameterdarstellung einer Geraden	Analytische Geometrie des Raumes	AHS 6, in D 11. Schuljahr
5	senkrechte Vektoren in der Ebene	Analytische Geometrie der Ebene	AHS 5, in D 11. Schuljahr
6	Sehwinkel	Tangensfunktion	AHS 5
7	Volumen eines Drehkegels	Graph einer quadratischen Funktion	NMS
8	Lorenz-Kurve	Prozente an der Kurve ablesen	NMS/ AHS 5
9	Graph einer Polynomfunktion	Monotone Funktionen	AHS 6
10	Produktionskosten	Lineare Funktion	NMS/ AHS 5
11	Technetium	Halbwertszeit	AHS 6, in D 9. Schuljahr
12	Graph der Sinusfunktion	Trigonometrische Funktionen	AHS 6, in D 9. Schuljahr
13	Preisänderungen	Grundrechenarten, Prozentrechnung	NMS
14	Mittlere Temperaturänderungsrate	Differenzenquotient	AHS 6
15	Kredit	Zinsrechnung, Prozentrechnung	NMS
16	Funktion und Ableitung	Monotonie, Nullstellen, Ableitungsbegriff	AHS 7, in D 10. Schuljahr
17	Graph einer Ableitungsfunktion	graphisches Ableiten	AHS 7, in D 10. Schuljahr
18	Integral einer Funktion		AHS 8
19	Internetplattform	Statistische Kennzahlen, Median	NMS
20	Nettojahreseinkommen	gewichtetes arithmetisches Mittel	NMS
21	mehrere Wahrscheinlichkeiten	Pfadregeln	AHS 6, in D 8. Schuljahr
22	Elfmeterschießen	Interpretation der Binomialkoeffizienten	AHS 6, in D. 8. Schuljahr
23	Erwartungswert des Gewinns		AHS 7, in D. 10. Schuljahr
24	Tennisspiel	Wahrscheinlichkeiten	AHS 6, in D 8. Schuljahr

Tabelle 2. Aufgaben in Teil 2

Nr.	Aufgabenüberschrift	Mathematischer Inhalt	Stufe/Klasse
1a	200 m Lauf	Wendestelle, 2. Ableitung	AHS 7
1b	A	Differenzenquotient, Ableitungsbegriff	AHS 6/7
2a	A Altersbestimmung	Halbwertszeit, exponentielle Funktionen	AHS 6
2b		exponentielle Funktionen	AHS 6
2c		exponentielle Funktion, Prozentrechnung, Proportionalität	AHS 6/5
3a	A Blutgruppen	Ablese, Prozentrechnung	NMS
3b		Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswert	AHS 7, in D 10. Schuljahr
3c		Stichproben, Konfidenzintervall	AHS 8
3d		elementare Wahrscheinlichkeit, Ablese an Tabelle	AHS 6, in D 8. Schuljahr
4a	A Füllen eines Gefäßes	elementarer Flächeninhalt, Integralbegriff	NMS/ AHS 8
4b		konstante Ableitung, lineare Funktion, Differenzenquotient	AHS 6/7
4c		Integral einer linearen Funktion	AHS 8

tes im \mathbb{R}^n (was nicht einmal in den Lehrplänen genannt zu sein scheint) verkünstelt wurde.

Der „Realitätsbezug“ mit einer geradezu zwanghaften Anbindung an einen „realen“ Kontext führt dazu, dass außermathematisches Wissen eine Rolle spielt. So sollte der/die Maturant(in) für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe 10 wohl schon betriebswirtschaftliche Begriffe wie Fixkosten und Stückkosten kennen, die jedoch nicht in den Lehrplänen ausgewiesen sind. Oder, wie im Falle der Aufgabe 22 geht es offenbar nicht ohne Kenntnisse von Fußballregeln, die nicht explizit in den Lehrplänen stehen. Ob solche Aufgaben das relativ schlechtere Abschneiden der Maturantinnen (BMBF 2015) mitbeeinflusst haben?

Die Aufgaben des Teils 2 sollen angeblich direkten Anwendungsbezug signalisieren und an-

spruchsvollere Schulmathematik sowie „mathematische Modellierung“ erfordern im Gegensatz zu den „Quickies“ des ersten Teils. Greifen wir einmal die erste dieser Aufgaben als Beispiel heraus: Aufgabe 1 (eine karnevalistisch verkleidete Aufgabe im Sinne von Bandelt 2015), kleidet eine vorgegebene kubische Parabel in den Kontext eines Sprints ein. Für eine wirkliche Leistungsdiagnostik im Feldversuch nimmt man keine interpolierende Funktion (und erst recht keine kubische Parabel), sondern misst die Zeit nach bestimmten Abständen, z. B. alle 50 m nach Start (siehe etwa Graubner 2005). Die angegebene Polynomfunktion hat völlig unrealistische Koeffizienten, die die Kostümierung widerspiegeln: Man hat alle wünschenswerten Teilbarkeiten der Koeffizienten für die Beschleunigungsfunktion und erhält so die natürli-

Tabelle 3. Zuordnung zu Themenbereichen

Nr.	Inhaltlicher Bereich	Aufgaben-Nr. (Teil 1)	Aufgaben-Nr. (Teil 2)	Punktzahl (kumulativ)
1	Alltagsmathematik (Grundrechenarten, Durchschnitte bilden, Zahlenverhältnisse aufstellen, Prozentrechnung, Zinsrechnung, Tabellen ablesen)			
2	lineare und quadratische Funktionen, Graphen von Funktionen (ohne Infinitesimalrechnung)			
3	analytische Geometrie von Geraden, Vektoren, Skalarprodukt			
4	Winkelfunktionen			
5	Exponentielles Wachstum und Zerfallsprozesse	11	2a, 2b, 2c	7
6	Ableitung von Funktionen und Integrale	16, 17, 18	1a, 1b, 4a, 4b, 4c	13
7	Wahrscheinlichkeiten, Median, Binomialkoeffizienten	19, 21, 22, 23, 24	3b, 3c, 3d	11

che Zahl $x = 15$ für ihre Nullstelle. Abgesehen davon wird mit dieser Aufgabe zum vierten Mal in dieser Matura eine kubische Parabel in irgendeiner Hinsicht diskutiert (schon im Teil I betraf das die Aufgaben 9, 16, 17). Dies dokumentiert die Vermutung an Kenntnissen funktionaler Zusammenhänge: Für alles, was nicht linear, quadratisch oder exponentiell ist, muss die kubische Parabel als didaktischer Stellvertreter erhalten. Auch die Differentialrechnung als scheinbar notwendige Mathematik in dieser Aufgabe ist nur vorgeschoben. In der Unteraufgabe (a) ist der Graph der Geschwindigkeitsfunktion s' eine nach unten geöffnete Parabel, die sogar durch den Nullpunkt verläuft. Damit bekommt man sofort den Zeitpunkt, an dem die Geschwindigkeit (absolut) maximal wird. Wozu soll dann noch das Ausrechnen einer Wendestelle der Wegfunktion s gut sein? Bei (b) gehört der erste Teil klar zum Anforderungsbereich I. Beim zweiten Teil muss man nur die Begriffe „momentane Änderungsrate“ und „mittlere Änderungsrate“ kennen. Bei der vorliegenden Formulierung bleibt offen, ob die Funktion s überhaupt „die bestimmten Voraussetzungen“ erfüllt.

NiveaUANspruch

Typisch für die neuen Ziele des „kompetenz- und anwendungsorientierten Mathematikunterrichts“ ist die Aufgabe 4 aus Teil 2, die nur scheinbar zur Infinitesimalrechnung gehört, indem der hohe Anspruch nur vorgeschoben ist. Hier geht es in der Unteraufgabe (a) um ein Gefäß mit einem trapezförmigen Längsschnitt und mit der konstanten Dicke von 12 cm. Somit ist das Volumen gleich 12-mal dem Flächeninhalt des Trapezes. Letzterer kann durch elementare Formeln berechnet werden, z. B. nach Zerlegung in zwei Dreiecke. Das wäre eigentlich ein Thema für die Unterstufe oder auch die Mittelschule. Um aber die Sache dem bloßen Scheine nach kompliziert zu machen, wird die Integralschreibweise verwendet, und zwar ausschließlich für lineare Integranden, also überflüssigerweise. Offenbar soll das „Verständnis“ dafür

getestet werden, dass Integrale als Flächeninhalte und Volumina interpretiert werden können bzw. umgekehrt diese durch Integrale ausgedrückt werden können. Der Flächeninhalt $a(h)$ des rechteckigen Querschnitts in der Höhe h ist ebenfalls als 12 mal $(10 + 3h/10)$ elementar ausdrückbar. Also ist das Volumen bis der Höhe x gleich dem bestimmten Integral der Funktion $120 + 36h/10$ von 0 bis x , was aber nicht etwa so ermittelt werden soll, sondern was zusätzlich noch gegeben ist, womit auch $a(h)$ implizit gegeben ist, obwohl doch eigentlich $a(h)$ in der Unteraufgabe (a) bestimmt werden soll – „höhere Mathematik für Dummies“! Hier offenbart sich die Trivialisierung besonders krass. Die Höhe bei gegebenem Volumen in der Unteraufgabe (c) bestimmt man dann durch eine quadratische Gleichung. In früheren Jahrzehnten hätte man diese Aufgabe in sehr ähnlicher Form an der deutschen Realschule stellen und ganz ohne Integrale behandeln können.

Das Volumen $V(h)$ in Abhängigkeit von der Füllhöhe lässt sich mit Hilfe von $a(h)$ elementar als $V(h) = 120h + 1,8h^2$ herleiten, wenn man den Flächeninhalt eines Trapezes und das Volumen eines Prismas berechnen kann. Den Term für $a(h)$ kann man z. B. mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes herleiten. Die Größe 3,6 soll wohl als konstante momentane Änderungsrate der momentanen Änderungsrate des Volumens $V(h)$ in Abhängigkeit von h gedeutet werden. Dabei muss man wiederum nur wissen, was eine momentane Änderungsrate ist. Hier wird wieder (wie schon in Aufgabe 14 vom 1. Teil und in Aufgabe 1 vom 2. Teil) eine mittlere Änderungsrate abgefragt.

Kompetenzen über alles ...

Es geht in der Zentralmatura nicht mehr um wirkliche mathematische Inhalte sowie die vielbeschworene „Wissenschaftsorientierung“, sondern in erster Linie darum, den Erwerb angeblicher „Grundkompetenzen“ sowie anderer „Kompetenzen“ allgemeiner Art zu prüfen. Nicht zu übersehen ist zudem, dass in Deutschland die sogenann-

ten „Kompetenzen des mittleren Schulabschlusses“, nämlich vorwiegend Alltagsmathematik, inzwischen schon zu Themen universitärer Vor- und Brückenkurse für Lehramtsstudierende avanciert sind (siehe Bausch et al. 2014, Kapitel 4 und 5). Diese „Kompetenzen“ schlagen später auf die Qualifikation der Lehrer durch, wobei die Gymnasiallehrer möglicherweise abgeschafft werden zugunsten von Sekundarstufenlehrern, bei deren Ausbildung die Standards der bisherigen Realschullehrerausbildung (in Österreich: Mittelschullehrer) maßgeblich sind. Sowohl in Deutschland als auch in Österreich gibt es solche Bestrebungen: Zur neuen Mittelschule in Österreich heißt es, dass „seit 2001 auch die Qualifikation der HS/BMS-Lehrer und der Lehrer höherer Schulen angeglichen wird“ (siehe Neue Mittelschule).

Die schöne neue Allgemeinbildung

Klar erkennbar ist der politische Wille, dass bereits mit sehr elementarer Mathematik (fast nur eine gewisse Alltagsmathematik) die Matura bestanden werden kann. Die Erhöhung der Abiturquote ist das offene wie heimliche Ziel. Völlig elementare Dinge aus der Mittelstufe werden aufgebauscht zu Themen für die immer noch so genannte „Hochschulreife“. Dafür genügen die Standards bis etwa zum 9. Schuljahr, und zwar sowohl in Deutschland als auch in Österreich. Der mittlere Schulabschluss in Deutschland hat theoretisch sogar einen etwas höheren Anspruch. Somit besteht eine Tendenz, das Abitur neuer Art (nach 12 Schuljahren) auf das frühere Niveau der so genannten „mittleren Reife“ (nach 10 Schuljahren) oder gar darunter herabzudrücken.

Hinsichtlich der Beurteilung Zentralmatura 2015 wurde in der Presse ein Wiener Mathematikdidaktiker zitiert, der das Niveau als „angemessen“ ansieht (wohl weil die Durchfallrate bei 10,5 % lag; BMBF 2015). „Angemessen“ kann aber nur heißen in Bezug auf das, was an der Schule bis zur Matura tatsächlich noch unterrichtet wurde, was den Namen Mathematik verdient. Und das ist, wie auch in Deutschland, völlig unangemessen: Die Schulmathematik wird nur noch als „Grundbildung“ im Sinne von PISA & Co gesehen: „Allgemeinbildung wird verstanden als das Instrumentarium zur permanenten Selbstanpassung“ (Schirlbauer 2005, S. 201) und auf die „Employability“ hin ausgerichtet. Entsprechend sind die Ziele andere geworden (Wiechmann und Bandelt 2015). Will man das in Österreich wirklich? Darüber müsste offen in der Universität und laut in der Öffentlichkeit gesprochen werden.

Literatur

- H.-J. Bandelt: Modellbildung versus Modellisieren und Scheinmodellierung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 99 (2015) 6–18.
- I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P.R. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber, T. Wassong (Hrsg.): *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Springer Spektrum, 2014.
- BIFIE 2011: *Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis*, 143 Seiten. https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf.
- BIFIE 2015: <https://www.bifie.at/node/80>.
- Bildungsplan AHS: <http://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>.
- Bildungsplan Mittelschule: https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf.
- BMBF: Bekanntgabe der ersten Zwischenergebnisse der schriftlichen Klausurarbeiten zur Reifeprüfung 2015. https://www.bmbf.gv.at/ministerium/vp/2015/20150527_tabellen.pdf?4wlf6.
- R. Graubner: Wettkampfanalytische Untersuchung der Sprintleistungsfähigkeit bei Nachwuchssprinterinnen und -sprintern bei den U23-Europameisterschaften 2005 in Erfurt. http://www.bisp.de/SharedDocs/Downloads/Publikationen/Jahrbuch/Jb_200506_Artikel/Graubner.pdf?__blob=publicationFile.
- Kurier 2015: <http://kurier.at/lebensart/familie/zentral-matura-so-waren-die-mathematik-klausuren/129.817.452>.
- Matura 2015: Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung Mathematik, erstellt vom BIFIE, <https://www.bifie.at/node/3014>.
- Neue Mittelschule: http://de.wikipedia.org/wiki/Neue_Mittelschule.
- A. Schirlbauer: *Die Moralpredigt – Destruktive Beiträge zur Pädagogik und Bildungspolitik*. Sonderzahl Verlagsgesellschaft, Wien, 2005.
- R. Wiechmann, H.-J. Bandelt, Zehn unbequeme Fragen zur Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts, *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 23 (2015) 176–180.

Wolfgang Kühnel, Universität Stuttgart, Fachbereich Mathematik, Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart
Email: kuehnel@mathematik.uni-stuttgart.de

Hans-Jürgen Bandelt, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik, Bundesstraße 55, 20146 Hamburg
Email: bandelt@math.uni-hamburg.de

Editorischer Hinweis: Der Text wurde jeweils einem Mitglied der Klagenfurter Projektgruppe des Pilotprojekts zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung und einer im Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens aktuell für die schriftliche Reifeprüfung Mathematik verantwortlichen Person vorgelegt. Beide haben von der Möglichkeit zur Kommentierung im vorliegenden Heft keinen Gebrauch gemacht.

Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts¹

Andreas Vohns

Liebes Auditorium, ich will nicht verschweigen, dass ich der Einladung von Hans-Peter Klein, heute hier vor Ihnen zu sprechen, mit einem gewissen Zögern gefolgt bin. Es ist ja nicht ganz offensichtlich, was ich Biolog/innen und Biologiedidaktiker/innen als Mathematikdidaktiker zu erzählen habe, insbesondere zum Thema „Fachlichkeit“, welches sich Kollege Klein ausdrücklich gewünscht hat. Zwar werden unsere beiden Fächer ganz gerne unter dem Label „MINT“ subsummiert (etwa im Titel dieser Tagung), die Unterschiede fangen aber bereits dort an, wo dem von mir vertretenen Fach im Akronym ein eigener Buchstabe gewidmet wird, die Biologie sich hingegen als Teil der Naturwissenschaften mitgemeint fühlen darf.

Über Fachlichkeit von Mathematikunterricht zu sprechen ist mir aufgegeben worden, die „allgemeine Bildung“ habe ich selbst hinein moniert. Das ist im Sinne einer Selbstbeschränkung bzw. Schwerpunktsetzung zu verstehen. Man könnte auch fragen, welche Fachlichkeit ein Unterricht anstreben sollte, der möglichst gut dem Ziel einer Vorbereitung für ein späteres mathematisches oder mathematiknahes Studium dient. Das ist heute nicht mein Thema, womit ausdrücklich nicht gesagt ist, dass es nicht auch eine legitime Zielsetzung oder ein interessantes Thema wäre.

Nun machen beide Begriffe, Bildung und Fachlichkeit, gewisse terminologische Überlegungen nötig, will man sie nicht einfach gemäß einem unterstellten Alltagsverständnis verwenden. Auch deshalb, weil man für beide Begriffe annehmen kann, dass auf sie prinzipiell dasselbe zutrifft, wie auf den von Jochen Krautz kritisch beäugten Kompetenzbegriff. Die Begriffe „Bildung“ und „Fachlichkeit“

- sind „für unterschiedliche weltanschauliche Orientierungen und pädagogische Überzeugungen anschlussfähig“ ([9], S. 7)
- und können „wie ein ‚Container‘ mit Interpretationen aller Art gefüllt werden“ ([9], S. 7),

- wodurch sie „wie Beschwörungsformeln“ wirken, „die Zustimmung erzeugen sollen, obwohl niemand genau weiß“ ([9], S. 7), was „Bildung“ bzw. „Fachlichkeit“ eigentlich meint.

Wohl gemerkt: Wo ich von „Bildung“ und „Fachlichkeit“ rede, redet Krautz von „Kompetenz“ bzw. „Kompetenzorientierung“.

Ich will und kann Ihnen im Folgenden nicht vorab zwei Definitionen von „Bildung“ und „Fachlichkeit“ vorlegen. Ich werde stattdessen exemplarisch anhand von vier historischen Etappen in der Entwicklung des Mathematikunterrichts² betrachten, welche semantische Belegung „Bildung“ bzw. „Fachlichkeit“ jeweils implizit oder explizit erfahren haben.

Das ist für den Begriff der „Fachlichkeit“ insofern schwieriger, als er meinem Eindruck nach in der Diskussion um Mathematikunterricht erst in jüngster Zeit überhaupt eine Rolle spielt. Zumindest insofern, als man die explizite Verwendung dieses Terminus betrachtet. Das mag daran liegen, dass Mathematik wenigstens an weiterführenden Regelschulen für gewöhnlich im Rahmen von Fachunterricht stattfindet, dessen Fachbezeichnung „Mathematik“ lautet. Anders als die Biologie ist Mathematik auch nicht Teil der Diskussion um die Einführung eines übergreifenden Unterrichtsfachs „Naturwissenschaft(en)“. In diesem Sinne ist der Fachlichkeit also Genüge getan. Dass der Begriff „Fachlichkeit“ in der Diskussion auftaucht, muss (bezogen auf Mathematik) an anderen Dingen liegen, etwa an jenem bereits erwähnten Begriff der „Kompetenz“ bzw. der mit ihm verbundenen „Kompetenzorientierung“, die man in einer gewissen Spannung, wenn nicht im Gegensatz zu einer „Fachorientierung“ bzw. „Fachlichkeit“ sieht.

Wirft man einen Blick auf die Geschichte des Schulfaches „Mathematik“, so ist festzuhalten, dass dessen Existenz als solche im Rahmen einer allgemeinen Schulpflicht eine vergleichsweise junge Entwicklung darstellt. In der Primarstufe gibt es

¹ Leicht redigiertes Manuskript des gleichnamigen Vortrags auf der Tagung „Die Bedeutung der Fachlichkeit im Unterricht und der Lehrerbildung in den MINT-Fächern“ der Gesellschaft für Didaktik der Biowissenschaften am 19. 12. 2015 an der Universität Frankfurt am Main. Fußnoten bezeichnen nachträgliche Ergänzungen. Für kritische Hinweise danke ich Wolfram Meyerhöfer und Thomas Jahnke.

² Diese Etappen sind ad hoc mit Blick auf das heutige Thema konzipiert und lassen erkennbar Lücken im historischen Ablauf. Je nach Fragestellung kann man zu anderen zeitlichen Einteilungen kommen.

Mathematikunterricht in Deutschland erst seit man Volksschulen abgeschafft und Grund- und Hauptschulen eingerichtet hat, also seit Mitte der 1960er Jahre. Zuvor gab es an Volksschulen *Rechenunterricht*. Diese unterschiedliche Benennung entspringt einer Tradition, die man ins 19. Jahrhundert zurückverfolgen kann, welches dann auch die erste Etappe meiner Überlegungen darstellt.

Etappe 1: Rechen- und Mathematikunterricht im 19. Jahrhundert

Einen Unterricht im Fach *Mathematik* gab es im 19. Jahrhundert nur an Gymnasien³, also für einen recht elitären Zirkel von etwa ein bis zwei Prozent der männlichen Heranwachsenden eines Jahrgangs. Mathematik für Mädchen gibt es dann auch an höheren Mädchenschulen überhaupt erst seit dem Jahr 1908 (vgl. [14], S. 81).

Insofern „allgemeine Bildung“ dem Leitmotto von Comenius „Omnes omnia omnino“ (allen alles allumfassend lehren) entsprechend gedacht wird, kann man gewisse Zweifel haben, ob Mathematik im engeren Sinn im 19. Jahrhundert überhaupt Teil der *allgemeinen* Bildung war.

Was es für alle von der Schulpflicht erfassten Personen gab, war Unterricht im *Rechnen*.⁴ Diesen gab es auch für die Gymnasiasten, als eigenes Fach ausgewiesen und zwar durchaus im selben Umfang, wie Unterricht in Mathematik (vgl. [2], S. 89ff).

Jene Unterscheidung zwischen „Rechnen“ und „Mathematik“ öffnet uns auch eine Perspektive darauf, in welchem Gewand man sich im Kontext von Unterricht mit der Frage der „Fachlichkeit“ bereits deutlich länger beschäftigt hat: Nämlich jenem der „Wissenschaftlichkeit“ bzw. „Wissenschaftsorientierung“.

Bezüglich des Rechen- und Mathematikunterrichts im 19. Jahrhundert kann man leicht zugespitzt festhalten, dass Rechenunterricht sich der Frage der Wissenschaftlichkeit nicht zu stellen hatte, während Mathematikunterricht hinsichtlich seiner Wissenschaftsorientierung in Bedrängnis geriet.

Rechenunterricht umfasste neben den Grundrechnungsarten vor allem Anwendungen der „regula de tri“ also des Dreisatzes, u. a. die Prozent-

und Zinsrechnung. Betrachtet man beispielsweise die letzten beiden Schuljahre des Rechenunterrichts der höheren Mädchenschulen, so kamen dort überhaupt keine neuen mathematischen Inhalte mehr hinzu. Es wurden schlicht die bereits vertrauten Rechenweisen in immer neuen Sachkontexten eingeübt (vgl. [14], S. 82f).

Überhaupt war Rechenunterricht nicht selten reiner Paukunterricht, im Zweifel war die Fähigkeit, das korrekte Ergebnis zu erzielen, immer wichtiger, als ein Einsehen darin, dass und warum es sich um das richtige Ergebnis handelte. Aller Kritik aus fortschrittlicher Pädagogik und aufkeimender Rechendidaktik zum Trotz verfuhr der Rechenunterricht in weiten Teilen immer noch dem Lehrspruch der mittelalterlichen Rechenmeister gemäß: „Machß nach der Regel so kumpt das facit“ (Widmann 1489, zitiert nach [11]).

Der Bildungsanspruch des *Rechenunterrichts* war strikt material, ja funktional: Die Rechenweisen und die Kontexte, in denen gerechnet wurde, waren durch ihre unmittelbare Nützlichkeit für das künftige Alltags- und Berufsleben begründet.⁵

Rechenunterricht war von den auch heute noch immer wieder referenzierten Vorstellungen humboldtscher Bildung als „Anregung aller Kräfte des Menschen, damit diese sich über die Aneignung der Welt [...] entfalten und zu einer sich selbst bestimmenden Individualität oder Persönlichkeit führen“ ([5], S. 40) meilenweit entfernt.

Gymnasialer *Mathematikunterricht* war nun andererseits (auch durch den parallel stattfindenden Rechenunterricht) von allzu weltlichen Zwängen weitgehend befreit. Mathematikunterricht wurde fast ausschließlich formalbildende Wirkung zugesprochen. Man nahm die Ideen des Neuhumanismus im Sinne dessen Ziels einer allgemeinen Menschen- und Persönlichkeitsbildung an und suchte sie im Sinne dessen Mittels der Beschäftigung mit klassischen (Lehr-)Texten, insbesondere der griechischen Antike und des Mittelalters, umzusetzen (vgl. [4]). Man setzte also darauf, dass die Gymnasiasten in der Auseinandersetzung mit dem mathematischen Denken und Argumentieren der „großen Alten“ etwas über das menschliche Denken und Argumentieren als solches erfahren und somit ganz allgemein lernen, richtig oder jedenfalls logisch zu denken.

³ Die folgenden Aussagen beziehen sich auf Deutschland bzw. im Wesentlichen auf Preußen. Für einen Überblick für das Deutsche Kaiserreich vgl. [13], S. 2.

⁴ Erwähnt werden sollte, dass es in recht unterschiedlicher quantitativer Ausprägung auch noch Unterricht in „Raumlehre“ als einer „volksschulmäßigen Geometrie“ ([13], S. 12) gab. Im Folgenden zum Rechenunterricht getroffene Aussagen dürften grosso modo auch für den Raumlehreunterricht zutreffen.

⁵ Es ist ergänzend darauf hinzuweisen, dass sog. „Sekundärtugenden“ (Ordnung, Fleiß, Disziplin) gewissermaßen als allgemeine „Untertanenkompetenzen“ noch bis in die 1960er Jahre hinein ganz offiziell eine Rolle für die Legitimation von Rechenunterricht gespielt haben (vgl. [8], S. 60f) Das steht aber nicht im Widerspruch zu einer funktionalen Ausrichtung des Rechenunterrichts.

Diese Pauschalantwort wurde im 19. Jahrhundert zunehmend zum Problem: Wenn man Mathematikunterricht rein formalbildend zu legitimieren versucht, dann erlaubt dies im Allgemeinen noch keine Auswahl spezifischer Inhalte. Die stark auf klassische Lehrtexte hin orientierte Themenauswahl erschien den Hochschulmathematikern seinerzeit zunehmend nicht mehr tragbar, der Unterricht geriet von Seiten der Wissenschaft unter Modernisierungsdruck.

Wenn die Frage der Stoffauswahl aber nicht mehr rein klassizistisch beantwortet werden kann und – wie im 19. Jahrhundert geschehen – parallel der Korpus des wissenschaftlichen Wissens so gehörig anwächst, dass ein schlichtes Schritthalten des Unterrichts mit der Wissenschaft aussichtslos erscheint, dann hat man ein veritables Problem (vgl. [6], S. 29). Wenn sich dann parallel noch eine neue Schulform etabliert, nämlich das Realgymnasium, der das Weltliche auch im Mathematikunterricht weit weniger fremd ist, dann entsteht dringender Reformbedarf (vgl. [10], S. 79ff).

Einen möglichen Ausweg aus dieser Problemlage des gymnasialen Mathematikunterrichts sollten die unter maßgeblicher Mitwirkung von Felix Klein erarbeiteten, zu Beginn des 20. Jahrhunderts, genauer 1905 in Meran verabschiedeten „Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte“ weisen. In ihnen wird die alte formalbildende Vorstellung einer allgemeinen Denkschulung durch Mathematik zu Gunsten des Ziels einer spezifischen „Sonderaufgabe“ des Mathematikunterrichts aufgegeben, der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“. Diese Zielvorstellung – soll es zum Ersten erlauben, bislang isolierte Themen der Arithmetik, Algebra und Geometrie um den Begriff der Abbildung bzw. Funktion hin zu fokussieren und in eine organische Beziehung zueinander zu setzen (vgl. [10], S. 170), – sie soll zum zweiten als Auswahlkriterium dienen, um solche Inhalte als weniger relevant zu charakterisieren und daher aus dem Curriculum auszuschneiden, die sich nicht um diesen Gedanken herum bündeln lassen, – sie dient drittens als Legitimation dafür, das moderne Thema Analysis in den Unterricht der Oberstufe einzuführen und – schließlich viertens wird funktionalem Denken auch das Potential zugesprochen, zwischen formal- und materialbildenden Vorstellungen insofern zu vermitteln, als die Erziehung zu dieser Gewohnheit sehr wohl auch an solchen Themen stattfinden kann und soll, die auch praktisch bedeutsam erscheinen, also an naturwissenschaftlichen, insbesondere physikalischen und technischen Anwendungen des Faches.

Die Meraner Reform bricht damit mit den strikt anti-utilitaristischen Bildungsvorstellungen, die man noch zu Beginn des 19. Jahrhunderts nahezu exklusiv mit der Mathematik verband. Erfolgreich war die Meraner Reform rückblickend betrachtet aber hauptsächlich hinsichtlich der Einführung der Analysis, der Etablierung des Funktionsbegriffs in der Algebra und des Abbildungsbegriffs in der Geometrie (vgl. [10], S. 302). Eine tatsächlich erfolgte durchgängige Orientierung des Mathematikunterrichts auf die „Gewohnheit des funktionalen Denkens“ als besonderer Probe mathematischen Denkens hin, kann aber kaum attestiert werden. Inwiefern die Meraner Reform das Fachlichkeits- und Bildungsproblem des 19. Jahrhunderts „lösen“ konnte, ist daher überaus fraglich.

Etappe 2: Bildungskatastrophe und Neue Mathematik

Fachlichkeit im Sinne von Wissenschaftlichkeit rückt gut 60 Jahre nach der Meraner Reform wieder in den Mittelpunkt des Interesses. Im Rechen- und Mathematikunterricht der Nachkriegszeit herrscht mittlerweile das vor, was Helge Lenné „Aufgabendidaktik“ nennt:

Der Stoff wird in eine Kette von Regeln bzw. Regelgruppen aufgereiht, an die jeweils Klassen zugehöriger Aufgaben angelagert sind. ([20], S. 143)

Komplexe Aufgaben lassen sich dabei als Kombination auffassen. [...] Die einzelnen Gebiete zeigen in sich eine strenge Systematik. Sie sind jedoch untereinander wenig verknüpft, sondern werden jeweils relativ isoliert behandelt. [...] Querverbindungen anhand übergreifender Ideen oder Strukturen werden – jedenfalls systematisch – kaum grundsätzlich herausgearbeitet. ([12], S. 50)

In gewisser Weise ist „Aufgabendidaktik“ die Fortsetzung „unguter“ Traditionen des Rechenunterrichts im Mathematikunterricht: „drill and practice“ für eine Reihe beziehungslos nebeneinander stehender Aufgabentypen, ohne den Anspruch auf Einordnung in eine größere fachliche Systematik und deutlich performanz- und verfahrenorientiert, kaum auf Einsicht und auf begriffliches Verstehen abzielend.

Im Fahrwasser der seitens Georg Picht ausgerufenen Bildungskatastrophe und Ralf Dahrendorfs Ruf nach „Bildung als Bürgerrecht“ öffnete sich nun gegen Ende der sechziger Jahre ein Fenster für durchgreifende Reformen im schulischen Bereich und in der Folge auch des Rechen-

bzw. Mathematikunterrichts. Die von Picht diagnostizierte Bildungskatastrophe war dabei, wie es Damerow formuliert hat, mit Blick auf Mathematikunterricht zunächst inhaltlich unterdeterminiert (vgl. [3], S. 90ff).

Picht und Dahrendorf ging es ja auch nicht um den Verfall humboldtscher Bildungsideale. Vielmehr ging es ihnen um eine ökonomisch (Picht) und demokratiethoretisch (Dahrendorf) geboten erscheinende Erhöhung des Bildungsstandes der Gesellschaft, ganz pragmatisch in dem Sinne, dass mehr Menschen Zugang zu höheren Bildungsabschlüssen bekommen sollten. Wie diese Ziele nun durch Reformen im Mathematikunterricht unterstützt werden konnten, war inhaltlich weitgehend offen.

Die „Neue Mathematik“ antwortet⁶ darauf faktisch zunächst gymnasial, in der Folge dann auch mit Blick auf Grund- Haupt- und Realschulen durch erhöhte oder überhaupt erst geforderte „Wissenschaftlichkeit“ in einem ganz bestimmten Sinn: „Moderne Mathematik“ sollte in die Schulen, was vor allem „Strukturmathematik“ (sensu Bourbaki) bedeutete, spezifischer vor allem eine Orientierung an deren zentralen Begriffen „Menge – Struktur – Abbildung“ samt ihrer Spezialisierungen und Überlagerungen, die vom ersten Schultag an als „roter Faden“ durch die gesamte Schulmathematik leiten sollten. Dieser Verwissenschaftlichungsanspruch führte dann u. a. auch zur Umbenennung des Schulfachs „Rechnen“ in „Mathematik“ ab der ersten Klasse der Primarstufe und – ganz anders als die Meraner Reformen – zu einem deutlichen Zurückdrängen von Anwendungen zu Gunsten innerfachlich systematischer Betrachtungen.

Auch diese Reform scheiterte bekanntlich und zwar kläglich. Dieses Scheitern hat vielfache Ursachen, denen ich hier im Einzelnen nicht nachgehen kann, so man das Scheitern überhaupt als bislang hinreichend geklärt betrachten will. Eine Ursache ist für mein heutiges Thema von Interesse, nämlich ein schon früh diagnostizierter „Konstruktionsfehler“ dieser Reformen. Während man nämlich für die Oberstufe des Gymnasiums vielleicht noch einräumen kann, dass man es etwa bei dem Versuch, die Schulanalyse wieder näher an die moderne universitäre Analysis heranzuführen schlicht ein wenig weit getrieben hatte, was die Anforderungen an die Strenge der Darstellungen

angeht und dabei die für ein Verständnis nötige Anschaulichkeit ins Hintertreffen geriet, liegen die Probleme für die unteren Schuljahre tiefer.

Strukturmathematische Begriffe, etwa der der „Gruppe“ haben in der Wissenschaftsdisziplin Mathematik spezifische Funktionen, sie ordnen Phänomene auf einem bestimmten Niveau der Auseinandersetzung mit Mathematik, sie stellen nicht zuletzt in ihrer Strenge und Präzision das Endprodukt lange andauernden historischen Ringens dar. Es ist nun nicht von vorne herein klar, dass diese Begriffe in ganz anderen, nämlich schulischen Kontexten und bei deutlich elementareren Inhalten überhaupt dieselben orientierenden Wirkungen entfalten können, wie in der aktuellen wissenschaftlichen Forschung. Im Zuge der Neuen Mathematik in den Schulen verkamen dann viele neu eingeführte Begriffe und Konzepte letztlich zum Selbstzweck. Sie ordneten nicht die weitgehend konstant gehaltenen Inhalte und Themen, sie wurden schlicht neuer Lernstoff.

Als Fazit dieser zweiten Etappe könnte man ziehen, dass die Frage, was die Fachlichkeit von Mathematikunterricht im Rahmen allgemeiner Bildung ausmachen soll, jedenfalls nicht durch eine vordergründige Orientierung auf „Wissenschaftlichkeit“ im Sinne einer möglichst frühen und breiten Adaption der begrifflichen Strukturen moderner universitärer Beschäftigung mit Mathematik zufriedenstellend beantwortet werden kann.

Etappe 3: Die fachdidaktische Emanzipation

Die Neubestimmung der Fachlichkeit des Mathematikunterrichts im Nachgang der Neuen Mathematik ist meinem Eindruck nach durch zwei Aspekte gekennzeichnet:

- Erstens, auch wenn es zunächst paradox klingt, durch das Eingeständnis, dass Mathematik im Kontext von Schule gleichermaßen weniger, wie auch mehr bedeuten muss, als Auseinandersetzung mit der Wissenschaft „Mathematik“.
- Zweitens, eine Neubestimmung des Bildungsauftrags des Mathematikunterrichts, die die Traditionen von Rechen- und Mathematikunterricht produktiv aufgreifen will, in dem sie zwischen allgemeiner Menschenbildung, Erziehung zum mündigen Staatsbürger und pragmatischer Grundbildung zu vermitteln sucht.

⁶ „Antwortet“ ist hier nicht so gemeint, dass die Neue Mathematik auf durch Picht oder Dahrendorf aufgeworfene Probleme eingeht, sondern schlicht als faktische Antwort in dem Sinn, dass die inhaltlich unterdeterminierte Lücke mit etwas aufgefüllt wird, das man „Neue Mathematik“ nennt (deren internationale Ursprünge älter sind als Picht und Dahrendorfs Forderungen). Zwischen den Zielsetzungen der Neuen Mathematik und den Zielen von Picht bzw. Dahrendorf bestehen durchaus Spannungen, vgl. ausführlicher [15], S. 15ff.

Das Eingeständnis, dass mit „Mathematik“ im Kontext von Unterricht weniger gemeint sein muss, als Auseinandersetzung mit der Wissenschaft „Mathematik“ findet sich etwa in Erich Wittmanns und Gerd Müllers „Handbuch produktiver Rechenübungen“, wo es mit Blick auf den Unterricht in der Primarstufe heißt:

Unser Konzept beruht nämlich darauf, dass es im Mathematikunterricht der Grundschule nicht um ‚Mathematik‘, sondern um die ganz elementare Zahlen- und Formensprache geht, ebenso wie es im Deutschunterricht nicht um ‚Germanistik‘, sondern um Sprache und Literatur geht. ([22], S. 4)

Das wirkt nun überraschend bescheiden, in gewissem Sinne fast reaktionär, alte Traditionen der Trennung in Rechen- und Mathematikunterricht aufgreifend. Wäre da nicht die Spezifikation „elementare Zahlen- und Formensprache“.

Es geht also nicht um die Wiederherstellung des alten, allein auf die mechanische Beherrschung von Rechenverfahren abzielenden Rechenunterrichts, sondern um eine Einführung in eine altersgemäße Interpretation der Aktivität „Mathematik“, die für Wittmann und Müller zunächst im Erwerb der elementaren Zahlen- und Formensprache besteht.

Ebenso wie Deutschunterricht sich mit Äußerungsformen der Sprache „Deutsch“ beschäftigt – schriftlich wie mündlich, in Sachtexten und in Literatur –, soll sich Mathematikunterricht mit Äußerungsformen von „Mathematik“ beschäftigen – und auf dem Niveau der Primarstufe sind dies für Wittmann und Müller das Sprechen in und über Zahlen und Formen.

Diese Vorstellung ist kompatibel etwa zu Bildungsvorstellungen Dietrich Benners, der den Charakter fachlichen Lernens im Laufe des Bildungsprozesses verschiedenen Transformationen ausgesetzt sieht, die von den „alltagspraktischen Umgangsformen“ über die „Sachkunden“ hin zum wissenschaftlichen Wissen und dessen Reflexion führen (vgl. [1]).

Mathematikunterricht in der Primarstufe wird in diesem Sinne seinem Fachlichkeitsanspruch dadurch gerecht, dass er die in der Alltagskultur implizit enthaltene Mathematik aufdeckt und allmählich in eine regelgeleitete Zahlen- und Formensprache überführt. Im Rahmen der Sekundarstufe I wird diese zu einer „Sachkunde“ in dem Sinne ausgebaut, als kulturell tradierte Zeichensysteme der Mathematik selbst zur Sache werden. Das bedeutet insbesondere, dass diese Zeichensysteme über das unmittelbar in der Alltagswelt vorfindbare bzw. dort unmittelbar praktisch für den Einzelnen bedeutsame hinaus deutlich erweitert und

ausdifferenziert werden (z. B. indem im Mathematikunterricht allmählich die Zahlbereiche erweitert und in die noch stärker abstrahierenden Zeichensysteme der Algebra einführt). Diese Entwicklung soll dann schließlich in einer wissenschaftspropädeutischen Beschäftigung mit Mathematik in der Sekundarstufe II münden, die zunehmend auch die Reflexion auf das mathematische Tun beinhaltet.

In diesem gestuften Verständnis von Fachlichkeit hat es dann Mathematikunterricht auch mit „mehr“ als der Wissenschaft Mathematik zu tun, was Wittmann durch die Rede von der „MATHEMATIK“ ausdrückt. Unter „MATHEMATIK“ versteht Wittmann

ein umfassendes gesellschaftliches Phänomen [...], das sich aus vielen Quellen speist, eine Fülle von Bezügen zu Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft, Kunst und Lebenspraxis aufweist und von der spezialisierten Universitätsmathematik auch nicht annähernd repräsentiert wird ([21], S. 7).

Ich verstehe Wittmann hier so, dass für ihn die Fachlichkeit von Unterricht dann ebenso gefährdet ist,

- wenn Mathematikunterricht sie nur mit Blick auf die spezialisierte Universitätsmathematik umzusetzen sucht (wie in der Neuen Mathematik),
- wie wenn er dieser spezialisierten Mathematik keine Bedeutung für das Schulfach zuspricht (wie im Rechenunterricht vor der Neuen Mathematik).

Eine ähnliche Auffassung von Fachlichkeit liegt meinem Verständnis nach auch Heinrich Winters vielzitiertem Essay „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“ ([19]) zu Grunde. Dort heißt es (ich beschränke mich im Folgenden auf die ersten beiden Grunderfahrungen):

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

- (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen, ([19], S.37)

Man könnte geneigt sein zu unterstellen, bei Punkt (1) ginge es vor allem um Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin. Winter lässt das aber allenfalls dort gelten, wo es um eine Einführung in das „Alltagsrechnen“ gehe, womit Winter den Bereich unmittelbar verwertbarer mathematischer Grundbildung sehr eng fasst. Interessant und wirklich unentbehrlich seien Anwendungen der Mathematik hingegen erst, „wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, *wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann*“ ([19], S. 38).

Mit der ersten Grunderfahrung geht es Winter mithin um eine Neubestimmung des „Bürgerlichen Rechnens“ in dem Sinne, dass aus diesem ein Rechnen für mündige Staatsbürger in demokratisch verfassten, in vielen Bereichen auf Mathematisierungen zurückgreifenden Gesellschaften werden soll (vgl. ausführlicher [17]). Dazu reichen Anwendungsorientierung und Lebensnähe allein nicht aus, solange „der Modellcharakter verhüllt und der Lebenszusammenhang undeutlich“ ([19], S. 38) bleibe.

Mit Grunderfahrung (2) greift Winter das Ziel einer allgemeinen Menschenbildung auf. Die Auseinandersetzung mit „nicht interpretierter“ ([18], S. 133) Mathematik bezieht für Winter ihre Bildungsbedeutung zwar einerseits auch aus der Tatsache, dass diese als „Spielmaterial“ (ebd.) für außermathematische Modellierung unverzichtbar ist. Sie zieht ihre Bedeutung aber vor allem daraus, dass Schülerinnen und Schüler erfahren sollen „dass Menschen im Stande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen. Oder anders formuliert: daß strenge Wissenschaft möglich ist“ ([19], S. 40).

An mehreren Stellen seines Essays betont Winter, dass Mathematikunterricht es bei der Realisierung solcher Bildungsansprüche nicht dabei belassen kann, Schülerinnen und Schüler in die Aktivität Mathematik einzuführen, sondern dass die „Reflexion auf das eigene Denkhandeln“ ([19], S. 42) unverzichtbar erscheint.

Das gilt einerseits für das mathematische Modellieren, über dessen Möglichkeiten und Grenzen, Stärken und Schwächen als ein spezifischer Weltzugang etwas zu erfahren überhaupt erst das über die Mathematik hinausweisende Bildungspotential des mathematischen Modellierens ausmacht. Das gilt aber andererseits auch, ja sogar erst recht für die innerscientifische Beschäftigung mit Mathematik, die sich als Disziplin in gewissem Sinne als solche bereits mit dem Ausloten der Möglichkeiten und Grenzen formalen Denkens beschäftigt, die Konstruktion in sich kohärenter, Widersprüche vermeidender universeller Denkgebäude anstrebt.

Ein Unterricht, in dem das nicht klarwerden kann, scheitert zwangsläufig am Anspruch der Fachlichkeit, egal wie elaboriert die in ihm verhandelten mathematischen Verfahren sind.

Etappe 4: Bildungsstandards und Kompetenzorientierung

Ich hatte meinen Vortrag unter anderem mit der Mutmaßung begonnen, dass die Frage der Fachlichkeit des Mathematikunterrichts sich eigentlich erst stellen kann, wenn man davon ausgeht, dass diese durch gewisse Entwicklungen in Bedrohung gerät und als möglichen „Übeltäter“ die Kompetenzorientierung ausgemacht.

Es ist insofern interessant, dass etwa die „Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ sich indirekt auf Heinrich Winters Grunderfahrungen beziehen, diesen allerdings durch subtile Änderungen einen deutlich anderen Spin geben. In den Bildungsstandards lauten die ersten beiden Grunderfahrungen nämlich so:

Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:

1. technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen,
2. Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen, ([7], S. 6)

Diese Modifikationen erscheinen mir nicht zufällig, sondern symptomatisch für problematische Züge der aktuell laufenden Reform des Mathematikunterrichts.

Wo Winter davon spricht, man solle erfahren, wie Mathematik genutzt werden kann, Erscheinungen der Welt, die uns alle angehen oder angehen sollten, in einer spezifischen Art und Weise wahrzunehmen und zu verstehen, verzichten die Bildungsstandards sowohl auf die „spezifische Art und Weise“ als auch auf die Phänomene, die uns alle angehen oder angehen sollten (was für eine potentiell staatsbürgerlich erziehende Funktion entscheidend wäre).

Wo Winter die Beschäftigung mit Mathematik in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln als geistige Schöpfungen eigener Art fordert, wird

diese in den Bildungsstandards durch deren Bedeutung „für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik“ gerechtfertigt, was den Gedanken der allgemeinen Menschenbildung deutlich herunterspielt.

In beiden Fällen haben wir es mit deutlichen Pragmatisierungen zu tun, die Gefahr laufen, die von Winter intendierten Bildungswirkungen zu unterlaufen. Denn in beiden Fällen wird die jeweils angesprochene Fähigkeit, mathematische Modellierung bzw. innermathematisches Operieren, zum Ziel als solches erklärt.

Kompetenzorientierung ist so gelesen im Kern erneut Performanzorientierung: Bildung soll im Prinzip bereits als verwirklicht gelten, wenn über ein bestimmtes Level mathematischer Fähigkeiten verfügt wird (vgl. ausführlicher [16]). Die Kompetenzorientierung stellt als Performanzorientierung gelesen nun aber, anders als dies bisweilen kolportiert wird, gerade keinen Bruch mit den Traditionen des Rechen- und Mathematikunterrichts dar. Rechenunterricht im 19. Jahrhundert und Mathematikunterricht im Sinne der „Aufgabendidaktik“ waren immer schon auf Performanz orientiert. Die Kompetenzorientierung würde diese Tradition allenfalls insofern modifizieren, als sie die kontextfreie rechnerische Performanz tendenziell der „Modellierungskompetenz“ (also: im Kontext rechnen können) unterordnet. Es bliebe aber (in einer Verkürzung auf Performanzorientierung) letztlich „rechnen können“, nicht „Mathematik verstehen“.

Nochmal zur Verdeutlichung: Für Winter steht mathematisches Modellieren im Dienst einer staatsbürgerlich gebotenen Aufklärung und die innerscientifische Beschäftigung mit Mathematik ist ihm Erfahrungsgrundlage der Möglichkeiten und Grenzen menschlichen Denkens. Wo schlicht die Mittel zum Zweck erklärt werden, besteht in der Tat die Gefahr, Bildung und Fachlichkeit im Sinne der dritten Etappe ernsthaft zu beschädigen.

Nachwort

Man sollte sich allerdings hüten, den Mathematikunterricht, wie er in der Breite vor Einführung der Bildungsstandards stattgefunden hat, romantisch zu verklären. Was Wittmann und Winter in Etappe 3 forderten, waren eben Forderungen, oder anders: Ideale, deren breite Realisierung man weder vor noch nach Einführung der Bildungsstandards als gegeben annehmen darf.

Mathematikunterricht war auch vor Einführung der Bildungsstandards in der Breite leider vielfach nicht viel mehr als die Fortsetzung von Re-

chenunterricht an anderen Inhalten und darf sich dann auch nicht mit den Federn eines fachlich orientierten Mathematikunterrichts schmücken.

Literatur

- [1] Dietrich Benner. Die Struktur der Allgemeinbildung im Kerncurriculum moderner Bildungssysteme. *Zeitschrift für Pädagogik*, 48(1):68–90, 2002. http://www.pedocs.de/frontdoor.php?source_opus=3821
- [2] Heike Renate Biermann. *Praxis des Mathematikunterrichts 1750–1930. Längsschnittstudie zur Implementation und geschichtlichen Entwicklung des Mathematikunterrichts am Ratsgymnasium Bielefeld*. Logos, Berlin, 2010.
- [3] Peter Damerow. *Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Band 1: Reformziele, Reform der Lehrpläne*. Klett, Stuttgart, 1977.
- [4] Lutz Führer. Mathematikunterricht nach dem 7. Schuljahr – Warum eigentlich für alle? *Neue Sammlung*, 38(4):489–511, 1998.
- [5] Hartmut von Hentig. *Bildung*. Hanser, München/Wien, 1996.
- [6] Wolfgang Klafki. Kategoriale Bildung. Zur bildungstheoretischen Deutung der modernen Didaktik. In: Wolfgang Klafki, Hg., *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*, 25–45. Beltz, Weinheim, 1963.
- [7] Kultusministerkonferenz der Länder KMK. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Wolters Kluwer, München, 2004.
- [8] David Kollosche. *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Springer, Wiesbaden, 2015.
- [9] Jochen Krautz. *Kompetenzen machen unmündig*. GEW Berlin, Berlin, 2015. http://www.gew-berlin.de/public/media/20150622_streit1-kompetenzen.pdf
- [10] Katja Krüger. *Erziehung zum funktionalen Denken: Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Logos, Berlin, 2000.
- [11] Ingmar Lehmann. Die Grundrechenoperationen im Mathematikunterricht aus historischer Sicht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin*, 38(2):106–111, 1989. http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/grundrechenoperationen_historische_sicht_1.pdf
- [12] Helge Lenné. *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Klett, Stuttgart, 1969.
- [13] Gert Schubring. Der Aufbruch zum ‚funktionalen Denken‘: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich. *NTM International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine*, 15(1):1–17, 2007.
- [14] Martina Strub. „Das nachsichtslose Einprägenwollen hilft zu nichts.“ *Vom Rechnen zur Mathematik in der höheren Mädchenbildung im 19. und frühen 20. Jahrhundert*. Universitätsbibliothek Bremen, Bremen, 2008. <http://elib.suub.uni-bremen.de/diss/docs/00011575.pdf>
- [15] Andreas Vohns. *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie*. Books on Demand, Norderstedt, 2007.
- [16] Andreas Vohns. Zur Bedeutung mathematischer Handlungen im Bildungsprozess und als Bildungsprodukte. In: Martin Rathgeb, Markus Helmerich, Ralf Krömer, Katja Lengnink, und Gregor Nickel, Hg., *Mathematik im Prozess*, 319–333. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013.
- [17] Andreas Vohns. Rechnen oder Rechnen lassen? Mathematik(unterricht) als Bürgerrecht und Bürgerpflicht. In Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Markus Helmerich, Krömer Ralf und Katja Lengnink, Hg., *Mathematik und Gesellschaft*, 16 S. Springer Spektrum, Wiesbaden, (in Druck), 2016.

- [18] Heinrich Winter. Bürger und Mathematik. *ZDM*, 22(4):131–147, 1990.
- [19] Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM*, (61):37–46, 1995.
- [20] Erich Ch. Wittmann. *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg, Wiesbaden, 6., neu bearb. Aufl., 1981.
- [21] Erich Ch. Wittmann. Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht*, 43:3–7, 1996. http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/Materialien/Offener_Unterricht.pdf
- [22] Erich Ch. Wittmann und Gerhard N. Müller. *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 1, Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Klett, Stuttgart, 2. Aufl., 1990.

Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Fakultät für Technische Wissenschaften, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt. Email: andreas.vohns@aau.at

Publizieren für die Praxis

Herausforderungen bei der Rechtesicherheit

Timo Leuders

Die Fachdidaktiken zeichnen sich durch ihre enge Beziehung zum Praxisfeld aus. Viele Fachdidaktikerinnen und Fachdiaktiker sind neben ihrer Forschung sehr aktiv bei der Publikation von Konzepten und Materialien für die Unterrichtspraxis oder für die Lehreraus- und fortbildung. In Hinsicht auf den Umgang mit geistigem Eigentum sind Praxispublikationen denselben Standards verpflichtet wie auch wissenschaftliche Publikationen. Sie unterscheiden sich aber darin, dass sie weitaus umfangreicher auf Abbildungen zurückgreifen: Fotos von Gegenständen, Orten und Personen, technische Zeichnungen, Auszüge aus Schülbüchern und vieles mehr. Das Urheberrecht hat hier schon immer geregelt, dass die Rechteinhaber solcher Bilder der Veröffentlichung zustimmen müssen. In den letzten Jahren haben sich hier einige Verschärfungen ergeben, die zum Teil auch mit den besonderen Anforderungen digitalen Publizierens zusammenhängen. An dieser Stelle geht es allerdings nicht um die detaillierten rechtlichen Überlegungen, die mit solchen Verschärfungen zusammenhängen, sondern um die Anforderungen an Autorinnen und Autoren, die aus der Tatsache erwachsen, dass Verlage immer mehr die zur Rechteabsicherung nötigen Maßnahmen auf Autorinnen und Autoren verlagern. Eigene Erfahrungen der letzten Jahre haben mich dafür sensibilisiert, dass sich hier eine Entwicklung abzeichnet, die das Publizieren für die Praxis zunehmend erschwert bzw. die zu Lasten der Qualität geht.

Zunächst sei kurz der Idealfall geschildert – wie stelle ich mir die Zusammenarbeit von Verlag und Autor bei der Rechteabsicherung vor? So wie nachfolgend geschildert, hat es viele Jahre problemlos funktioniert und so funktioniert es auch heute noch – sofern die Absprachen zwischen Verlag und Autor dies vorsehen.

Als Autor liefere ich neben meinem Text die gewünschten Abbildungen mit – möglicherweise gleich in Druckqualität, oder aber so wie sie mir vorliegen in einer Vorversion. Zugleich liefere ich möglichst präzise Quellenangaben mit, anhand derer die Redaktion im Verlag die Bildquelle ermitteln kann z. B. eine ISBN und Seitennummer, oder eine Webadresse. Wenn alles gut geht, fragt dann der Verlag (die Redaktion, eine Außenredaktion oder eine eigene Rechteabteilung) beim Rechteinhaber an, klärt die Bedingungen der Veröffentlichung (Lizenzen, Honorare, Form der Veröffentlichung: Print und/oder digital) und holt ggf. Bilder in passender Auflösung ein. Die Expertise für diesen Prozess sowie die Budgetierung liegen beim Verlag. Wenn es Probleme bei der Gewährung gibt (Lizenz zu teuer, Quelle nicht ermittelbar, Qualität nicht brauchbar) gibt es eine Rücksprache mit dem Autor, um Alternativen zu ermitteln. Am Ende dieses Prozesses steht eine Entscheidung für ein Bild sowie eine Dokumentation der Rechte, die beim Verlag liegt und verwaltet wird.

Dieses Vorgehen kenne ich seit vielen Jahren bei der Erstellung und Herausgabe von Büchern,

Schulbüchern, Zeitschriften und Artikeln und bin immer sehr zufrieden mit der Kommunikation und den Ergebnissen gewesen.

Neuerdings zeichnet sich allerdings eine Handhabung der Rechtevergabe ab, die Autorinnen und Autoren in eine meines Erachtens nicht akzeptable Situation bringt: Verlage erwarten von den Autoren eine schriftliche Bestätigung, dass sie Inhaber aller Rechte an den zu publizierenden Bildern sind. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, wenn es sich um Publikationsformen handelt, in denen keine kritischen Abbildungen auftreten – was in der Regel für alle wissenschaftlichen Artikel gilt. Für Praxispublikationen mit Abbildungen, wie oben beschrieben, ergeben sich mit diesem Vorgehen aber eine Reihe von Problemen, die für einen Autor oder einer Autorin nicht tragbar sind:

Rechteermittlung

Beim Herausuchen passender Bilder ist man als Autor oft „näher dran“ und kann auf Rechteinhaber z. B. per Mail zugehen. Beispielsweise hatte ich eine Reihe von Bierdeckeln eines Sammlers auf dessen Internetseite gefunden und wollte an den Formen unterschiedliche Symmetrietypen untersuchen lassen. Der Sammler hatte seine Mailadresse angegeben und nach einer Nachfrage per Mail stimmte er der Veröffentlichung zu. Zum Glück wurde ich vom Verlag darauf hingewiesen, dass ich damit nicht rechtensicher war, weil der Bierdeckel ja einer renommierten Brauerei zugeordnet werden konnte. Und zum Glück hat an dieser Stelle die Redaktion übernommen und angefragt – mit dem Ergebnis, dass die Brauerei zugestimmt hat. Allerdings gab noch eine Restunsicherheit: Die abgebildete kleine Meerjungfrau ist ja ein Kunstwerk und in der Tat ergab die Rückfrage bei der Erbgemeinschaft des Bildhauers, dass sie für die Abbildung eine höhere Summe verlangten. Also habe ich mich mit dem Verlag geeinigt, das Bild des Bierdeckels durch einen ganz anderen zu ersetzen. Wäre ich hier ganz auf mich gestellt, hätte ich kaum sagen können, ab wann ich schriftlich hätte zusichern können, die Bildrechte erworben zu haben.

Ein weiterer Fall: Im Netz habe ich bei Wikipedia ein Bild von Ferdinand von Lindemann gefunden. Dort ist die Information hinterlegt, dass das Bild „PD“, also „public domain“, auf deutsch: „gemeinfrei“ sei. Damit dachte ich, der Rechtssicherheit genüge getan zu haben. Die Auskunft vom Verlag war jedoch, dass sie solche in Wikipedia genannten Lizenzen nicht für ausreichend abgesichert halten, so dass eine erneute Suche bei Bildagenturen begann.

Das sind nur zwei Beispiele dafür, wie komplex die Frage der Bildrechte ist. Viele weitere Fragen kommen auf: Müssen alle Personen auf einem Bild zustimmen? Wenn Gebäude abgebildet sind, muss deren Eigentümer gefragt werden? Auch wenn es öffentliche Gebäude sind? Wenn ich ein Foto eines Gemäldes abbilde, wer hat die Rechte? Der Maler oder der Fotograf, oder beide? Wenn ich ein Bild verändere, z. B. aus didaktischen Gründen bearbeite, verzerre, färbe, oder Ausschnitte herausnehme, bin ich dann sicherer? Oder verstoße ich mit der veränderten Abbildung gegen die Eigentümerrechte? Ist beispielsweise die oben abgebildete gespiegelte und gefilterte Version des Bierdeckels auf der sicheren Seite? All diese Dinge sind durchaus im Urheberrecht geregelt und unklare Grenzfälle sind die Ausnahme und nicht die Regel. Um das aber entscheiden zu können, braucht man eine differenzierte Expertise im Urheberrecht – hier ist nicht einzusehen, warum ein Autor oder eine Autorin, für die Publizieren keineswegs das Hauptgeschäft darstellt, sich diese Expertise aneignen sollte.

Rechteeinholung

Auch wenn man sich über den Eigentümer der Bildrechte klar ist, muss man diese immer noch auf passende Weise einholen: Welche Formulierungen brauche ich? Welchen Rechtsumfang benötige ich? Reicht eine E-Mail? Verlage unterstützen hierbei durch die Vorlage von Mustertexten und Formularen. Man kann davon ausgehen, dass diese Formulare geprüft und passend sind, aber wer garantiert das? Damit sind wir bereits bei dem nächsten Problembereich.

Rechtsstreit

Die Dokumente, die man zur Rechteabsicherung einholt, muss man natürlich geeignet archivieren, damit man im Streitfall auf sie zurückgreifen kann. Ob die Archivierung bei einem Verlag oder in einem privaten Haushalt geschieht, macht keine erheblichen Unterschiede (allenfalls bei der Frage, wer dann damit die Arbeit hat). Entscheidender ist aber die Frage, was passiert, wenn die Rechte einmal bestritten werden. Das sieht dann oft so aus, dass man einen Brief von einem Anwalt erhält, der auf die unrechtmäßige Nutzung hinweist, eine Unterlassung fordert (wie geht das bei Tausend gedruckten Exemplaren?) und Entschädigung und Anwaltskosten in Höhe von ein- bis zweitausend Euro fordert. Was soll man nun tun? Ist der Anspruch rechtens? Muss man den oft vehementen Zahlungsforderungen nachgehen? Muss man überhaupt antworten? Für diese Fragen bleibt

einem nichts übrig, als einen Rechtsanwalt zu konsultieren und sich in der Folge um den drohenden Rechtsstreit zu kümmern. So wird man irgendwann zwangsweise zum Experten.

Ist denn ein solcher Fall realistisch? Wie wahrscheinlich ist es denn, dass ein Eigentümer eines Bildes dieses in einem Praxisartikel für Mathematiklehrkräfte findet? Tatsächlich läuft es heutzutage etwas anders ab: Der Inhaber einer größeren Bildersammlung (ein Verlag, eine Fotoagentur) gibt einem spezialisierten Unternehmen den Auftrag, seine eigenen Bilddatenbanken mit Bildern aus dem Internet abzugleichen. Dieses Unternehmen setzt eine Suchmaschine auf die Identifikation problematischer Bilder an (ein so genannter „bot“ = „robot“), welche im Erfolgsfalle halbautomatisch den passenden Mahnbrief erzeugt – der Besitzer einer Internetseite ist meist nicht schwer zu ermitteln. Was nun, wenn der mögliche Verstoß auf der Seite eines Verlagshauses gefunden wird? Wenn der Mahnbrief dort ankommt, kann die Rechteabteilung den Brief ihres Autors herausziehen, indem er oder sie bestätigt, alle Rechte an den Abbildungen zu besitzen und dann die Mahnung schlicht weiterleiten. Man muss hier auch nicht auf kulantere Behandlung hoffen, denn die Rechtssituation ist ja eindeutig und man hat auch gar nicht mit dem freundlichen Redakteur, sondern mit dem Justiziarat des Verlages zu tun.

Es ist meines Erachtens nicht einzusehen, warum ein Autor oder eine Autorin das Risiko tragen sollte, in einem solchen Fall für seine oder ihre Rechte einzutreten und Kosten und Aufwände auf sich zunehmen, die das Gesamthonorar an einer Publikation weit übersteigen. Angemessener wäre, wenn eine Experte oder Expertin beim Verlag entscheidet, wie der Verlag mit dem jeweiligen Fall umgehen will.

Natürlich kann man all diese Probleme schlicht unter marktwirtschaftlichen Gesichtspunkten bewerten: Die Arbeitsteilung zwischen Verlag und Autor ist nichts anderes als eine vertragliche Festlegung und kein Autor muss einen Vertrag eingehen, wenn er oder sie der Meinung ist, dass seine finanziellen Interessen nicht angemessen berücksichtigt sind. Ich habe aber den Eindruck, dass die aktuelle Entwicklung nicht unabwendbar ist, sondern dass Autorinnen und Autoren, die die Situation angemessen einschätzen, in den Vertragsverhandlungen durchaus für sich bessere Bedingungen erwirken können. Wenn ein Verlag Interesse an einer Veröffentlichung hat, kann er sich als marktwirtschaftlich handelndes Unternehmen entscheiden, den Rechte-Service, der zuvor vielleicht selbstverständlich war, nun per Vertrag zu übernehmen. Ich persönlich habe mich jedenfalls entschieden, Verträge nur dann zu unterschreiben,

wenn ich *nicht* für die Rechtssicherheit der Abbildungen eintreten muss. Meine Aufgabe sehe ich in der möglichst umfassenden Information des Verlages über die Herkunft der von mir ausgewählten Bilder und in der Flexibilität bei der Bildauswahl, wenn ein Wunschbild einmal rechtlich oder finanziell nicht zu verwirklichen ist.

Meine Erfahrung mit Verlagen sagt jedenfalls, dass zurzeit noch eine große Bereitschaft für konstruktive Lösungen existiert, dass aber Redakteure hierfür durchaus Energie und Argumente im eigenen Haus aufbringen müssen. Ob sich die Situation für Autorinnen und Autoren aus der Fachdidaktik künftig tendenziell besser oder schlechter gestaltet, hängt auch davon ab, wie wir als Autorinnen und Autoren künftig bei Vertragsschlüssen auftreten: Nur wenn wir das „out-sourcing“ des Rechtemanagements an Autoren allzu leicht als den Normalfall akzeptieren, wird es auch zum Normalfall werden.

Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg,
IMBF, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg
Email: leuders@ph-freiburg.de

Was heißt und zu welchem Ende studiert man Didaktik der Mathematik?

Versuch einer Antwort zwischen philosophisch-literarischen Assoziationen und der Gegenwartsrealität

Hans-Georg Weigand

Friedrich Schiller nahm 1789 eine Professur – zunächst ohne Gehalt – für Philosophie an der Universität Jena, auf der er Geschichte lehrte. In seiner Antrittsvorlesung mit dem Thema „Was heisst und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte?“ gibt er eine Antwort auf diese Frage durch eine rationale Analyse der Geschichte der Menschheit. Er geht dabei von der Voraussetzung aus, dass das alleinige Aufzählen von Fakten der Geschichte wenig hilfreich sei, dass es vielmehr eines „philosophischen Kopfes“ bedürfe, um Ideen in der Weltgeschichte zu finden, die unsere heutige Situation erklären und Leitlinien für zukünftige Entwicklungen darstellen können. Schiller unterscheidet dabei zwischen einem „Brotgelehrten“, der seine Studien nur im Hinblick auf seine spätere Tätigkeit betreibt, dem es darum geht, „Bedingungen zu erfüllen, unter denen er zu einem Amte fähig und der Vorteile desselben teilhaftig werden kann“, und der alles absondert, was ihm von diesem Weg abbringen könnte. Der „philosophische Kopf“ dagegen ist an der Erweiterung und Fortentwicklung seines Wissens im Hinblick auf die Sache interessiert, er versucht neue Gebiete zu erkunden und diese mit anderen in Verbindung zu bringen, und er findet „Reiz, Aufmunterung und Belohnung in seinem Gegenstand, in seinem Fleiße, selbst.“

Ob es den „Brotgelehrten“ zu Schillers Zeit – so – gab oder nicht, und ob dieser einem heutigen Pragmatiker oder Pflichterfüller entspricht, sei dahingestellt. Gut können wir uns aber „Brotgelehrte“ als Studierende vorstellen, die John Dewey in seinem Aufsatz „The Relation of Theory to Practice in Education“ (1904) beschreibt, und denen es in ihrem Studium lediglich um die „praktische Beherrschung der für ihren Berufe notwendigen Werkzeuge, der Techniken für das Unterrichten und für die Klassenführung“ geht, die sie in einer Art „Lehrlingsausbildung“ erwerben. Wohingegen wir unter einem „philosophischen Kopf“ eine(n) Studierende(n), eine Lehrkraft oder eben eine Didaktikerin oder einen Didaktiker bzw. eine in der didaktischen Forschung tätige Person sehen können, die insbesondere an der „wissenschaftlichen Methode“, der „Beherrschung der fachlichen

Grundlagen“ und der „Beherrschung didaktischer Prinzipien in ihrer Anwendung auf die fachlichen Grundlagen“ (aus Dewey 1992) interessiert ist.

In der Didaktik der Mathematik gilt es heute einerseits im Rahmen eines universitären Studiums angehende Studierende auf die Praxis ihres Berufes – jenseits einer „Brotlehre“ – vorzubereiten. Andererseits benötigen wir in der Didaktik – wie in jeder Wissenschaft – aber auch den „philosophischen Kopf“, den wir als eine Person ansehen können, die die Entwicklung der Didaktik im Hinblick auf die aktuelle Situation kritisch analysiert, die über mögliche Ziele einer Weiterentwicklung – im theoretischen Sinn und im Hinblick auf den realen Unterricht – nachdenkt, und die ihre eigenen Überlegungen und Tätigkeiten im Rahmen dieser Ziele gestaltet und diskutiert. Es mangelt wohl nicht an Personen, die sich heute gerne in dieser Rolle sehen.

Natürlich ist Wissenschaft weder stromlinienförmig noch eindimensional hinsichtlich anzustrebender Ziele zu planen. Offenheit gegenüber unterschiedlichen Ideen und Richtungen, Freiheit und die Möglichkeit eines unvoreingenommenen Nachdenkens und Experimentierens sind Grundelemente jeder Wissenschaft. Es bedarf aber auch der fortwährenden (Selbst-)reflexion und Überprüfung im Rahmen einer diskursiven wissenschaftlichen Kommunikation und schließlich einer empirischen Kontrolle und Feststellung des Erfolges.

Versuchen wir also – nicht umfassend, sondern exemplarisch und ausschnittsweise und angeregt durch die Diskussion um die „Stoffdidaktik“ in den Mitteilungen der GDM – einige Überlegungen – eigentlich sind es eher (wie der Titel schon sagt) Assoziationen – zur gegenwärtigen Situation der Didaktik der Mathematik anzustellen.

1. Dass „alles fließt“ und wir „nicht zwei Mal in denselben Fluss steigen“, wissen wir (nicht erst) seit Heraklit. Es gibt keine Wiederholung vergangener Zeiten und kein einfaches Zurückgehen auf schon Dagewesenes. So gibt es auch in der Didaktik kein Zurückgehen auf eine „Stoffdidaktik“ der 1960er und -70er Jahre, ganz gleich, ob und wie Stoffdidaktik damals erklärt wurde oder heute erklärt wird. Und sicherlich

kann man auch darüber streiten, ob – wie Hans Schupp in den MDGM 97 (S. 28 f.) zu der diesbezüglichen Diskussion meinte – man den Begriff „Stoffdidaktik“ nicht gleich durch „Didaktik der Mathematik“ ersetzen sollte. „Stoffdidaktik“ – im engeren Sinne – und dabei insbesondere die mathematischen Sachanalysen im Sinne von Arnold Kirsch und Heinz Griesel (siehe MGDM 98, 2014) waren für die Didaktik ein wichtiger Entwicklungspunkt und es gilt heute auf diesen Ergebnissen aufzubauen und darüber hinaus gehende Ideen zu entwickeln, die dann aber – evtl. – gar nicht mehr als Stoffdidaktik angesehen werden (was ja letztlich – siehe die Meinung von H. Schupp – auch keine Rolle spielt). Jede Wissenschaft braucht Fundamente bzw. gemeinsame Grundlagen für eine konstruktive wissenschaftliche Diskussion. Für die Didaktik der Mathematik sind diese Fundamente wohl erst in Ansätzen erkennbar, und wir sind noch weit entfernt von allseits im Rahmen eines sozialen Konsenses akzeptierten Grundlagen der Didaktik der Mathematik. Doch gerade das ist eine wichtige Aufgabe der kommenden Jahre, will sich Didaktik der Mathematik als Wissenschaft etablieren (vgl. auch Freudenthal 1978). *Stoffdidaktik oder eine aus mathematischen Inhalten entwickelte Didaktik stellt einen zentralen Pfeiler eines solchen Fundaments dar und ist – implizit und explizit – ein wichtiger Teil der heutigen Didaktik.*

2. „Weg von Euklid und hin zu Euklid?“ (Fladt 1955) ist auch heute noch eine kontrovers diskutierte Frage bzgl. des aktuellen Geometrieunterrichts. Das Interesse der Fachwissenschaftler an der euklidischen Geometrie hat sich allerdings erschöpft, jedenfalls dann, wenn man sie unter der Forschungsperspektive betrachtet. Wer heute in diesem Bereich noch etwas Neues entdecken will, der benötigt viel Fachwissen, Einfallsreichtum und Durchhaltevermögen. Erweiterungen wie die projektive Geometrie, endliche Geometrien oder Computergeometrien sind diesbezüglich weitaus vielversprechender (und – ebenso – wichtig für die Weiterentwicklung der Geometrie oder Mathematik). Wo sind die Parallelen zur Didaktik der Mathematik? Wer heute noch etwas Substantielles etwa zur Bruchrechnung oder Proportionalität *unter stoffdidaktischen Gesichtspunkten* beitragen möchte, der/die wird Kreativität und Einfallsreichtum benötigen. Doch auch die Didaktik hat sich – analog zur Situation in der Euklidischen Geometrie auf Gebieten jenseits einer – eng ausgelegten – Stoffdidaktik, etwa bzgl. Fehlvorstellungen, mentalen Modellen oder Grundvorstellungen und deren – vor allem auch empirisches

– Ergründen von Wirkungen stoffdidaktischer Überlegungen. Es ist fraglich, ob das nun tatsächlich ein „weg von der Stoffdidaktik“ ist.

Es gibt aber doch einen wesentlichen Unterschied zur Schwerpunktverlagerung in der Geometrie. Diese hat(te) ganz erhebliche Auswirkungen auf die Lehrerbildung an den Universitäten. Heutige Studierende – insbesondere des Gymnasiums – lernen in der Fachwissenschaft kaum noch die euklidische Geometrie kennen (obwohl es dringend erforderlich wäre), da das Interesse der Fachwissenschaftler an diesem Gebiet nicht mehr vorhanden ist und häufig sogar Lehrstühle für Geometrie „umgewidmet“ werden. Dagegen spielen in der Didaktik(aus)bildung an (deutschen) Universitäten fachliche und stoffdidaktische Aspekte – wenn nicht sogar (abhängig davon, was man genau unter Stoffdidaktik versteht) die – zentrale Rolle. *Genau diesen Aspekt stellen auch und insbesondere die Standards für Lehrerbildung im Fach Mathematik (DMV, GDM & MNU 2008) heraus und das Beispiel Geometrie in der Lehrerausbildung mahnt zur Wachsamkeit, dass zentrale Grundlagen der Didaktik – eben die Stoffdidaktik – in der (Aus-)Bildung nicht vernachlässigt werden.*

3. „Die Masse könnt Ihr nur durch Masse zwingen, ein jeder sucht sich endlich selbst was aus.“ ist der Leitspruch des Theaterdirektors im Vorspiel zu Faust I (Goethe 1808). Was für die Unterhaltung gelten mag, gilt sicherlich nur bedingt für die Weiterentwicklung einer Wissenschaft. Vielmehr zählt hier zunächst gezieltes Fragen, stringentes Argumentieren und Gründlichkeit bei der Beantwortung von Fragen mehr als eine breite Behandlung von Problemen mit oberflächlichen Antworten. Allerdings wird eine größere Anzahl an Wissenschaftler – und die gibt es sowohl in der Fachwissenschaft als auch der Didaktik der Mathematik, wenn wir die heutige Zahl mit der vor 50 Jahren vergleichen – auch mehr „Masse“ produzieren. Mehr Wissenschaftler bearbeiten ein größeres Gebiet oder weitere Bereiche, mehr Wissenschaftler benötigen aber auch mehr Frage- und Problemstellungen (schon alleine aus institutionellen Gründen). Und damit beginnt eine häufig schwierige Suche: Dass das Meer der Probleme in der Welt (der Didaktik der Mathematik) vielleicht nicht unendlich aber doch sehr groß ist, mag in abstrakter Weise richtig sein, in die reale Praxis der Dissertationsthemenfindungswelt eingebunden, zeigt sich für den einzelnen Suchenden jedoch manchmal eher ein kleiner Dorfweiher als ein weltoffener Ozean. Eine Ausweitungen der Didaktik der Mathematik über den mathematischen Kern hinaus in die Bereiche

der Bildungswissenschaften, Naturwissenschaften oder Fächer wie Kunst und Musik erfolgen aber nicht nur aufgrund inhaltlicher Gegebenheiten, sondern – natürlich – auch aus institutionellen, finanziellen oder strategischen Gesichtspunkten. Dies gilt nicht nur für die Didaktik der Mathematik, damit muss sich jede Wissenschaft auseinandersetzen. Und in den Randbereichen verschwimmen die Kompetenzen (um dieses Wort auch einmal zu benutzen) im Kernbereich, das gilt für die Didaktik in gleicher Weise wie für Randbereiche anderer Wissenschaften, wie etwa der Wirtschaftsmathematik, Medieninformatik oder Sportpädagogik. Dadurch besteht die Möglichkeit (oder Gefahr) einer (weitgehenden) Isolierung verschiedener Gebiete und deren Verselbstständigung. In diesen Zwischenbereichen kommt es dann schnell zu einem engen isolierten Expertentum, das von denjenigen besetzt wird, die in keinem der Kerngebiete mehr zuhause sind. Dies kann – positiv gesehen – zu einem neuen (wichtigen) eigenen Forschungsgebiet werden, kann aber andererseits auch zu einem „lebensweltfernen selbst-referentiellen System“ (MGDM 96, S. 18) werden. *Nicht die mögliche Differenzierung der Didaktik der Mathematik ist das Problem, vielmehr ist es die herausfordernde Aufgabe, das dann notwendige spezifische Professionswissen in Beziehung zu den Kernbereichen des Wissensbereiches zu entwickeln.* Dazu bedarf es neben der Fähigkeit, mit verschiedenen Wissensbereichen einen inhaltlich Austausch ermöglichen zu können, darüber hinaus auch der Zeit, sich multispezifisch zu bilden oder einzuarbeiten. Eine heute vielfach zu beobachten zu schnelle institutionelle Einbindung von Nachwuchswissenschaftlern der Didaktik in die obere universitäre Hierarchie wirkt diesbezüglich sicherlich nicht unterstützend.

4. In seiner Antrittsvorlesung gibt Schiller ermunternd zu bedenken, dass uns das Studium der Weltgeschichte „von der übertriebenen Bewunderung des Altertums, und von der kindischen Sehnsucht nach vergangenen Zeiten (heilt)“; und weiter, dass eine offene Auseinandersetzung mit der gegenwärtigen Situation, mit unseren „eigenen Besitzungen ... uns die gepriesenen goldnen Zeiten Alexanders und Augusts nicht zurückwünschen (läßt).“ Ob es bei Alexander und Augustus tatsächlich goldene Zeiten waren, sei dahingestellt, und ob es in der Didaktik bereits goldene Zeiten gab, ebenso. Richtig ist es jedoch, dass wir über das Studium der Entwicklung – vielleicht kann man auch schon Geschichte sagen – der Didaktik der Mathematik unsere gegenwärtigen „eigenen Besitzungen“

nicht zu gering schätzen sollten. Dabei ist es wissenschaftsspezifisch, dass die in zahlreichen – vom einzelnen nicht mehr zu überblickenden – Artikeln, Vorträgen, Büchern und Tagungsbänden produzierte Fülle an Beiträgen zur gegenwärtigen Didaktik der Mathematik nur ein kleiner Teil von bleibendem, dauerhaftem Wert ist oder sein wird. Nehmen wir als Beispiel den Einsatz digitaler – ehemals neuer – Technologien im Mathematikunterricht. Weltweit gibt es – in den letzten Jahrzehnten – Tausende von Veröffentlichungen zu diesem Thema und wir wissen heute über Möglichkeiten und Wirkungen des Einsatzes digitaler Technologien einiges mehr als vor 20 Jahren. Und doch lässt sich die Frage nach dem Wert oder gar dem Nutzen dieser Überlegungen nur schwer beantworten. Bildet der – weltweit noch geringe – konstruktive und effektive Einsatz digitaler Technologien im realen Unterricht den Maßstab für ein negatives Urteil, oder zeigt sich in der weitgehenden Akzeptanz in allen Bereichen der Didaktik der Mathematik und damit in der kaum noch vorhandenen Notwendigkeit einer eigenständigen Diskussion digitaler Technologien im Rahmen isolierter Arbeitsgruppen gerade der Erfolg dieser Diskussion? Eine gegenwärtig offene Frage ohne (m)eine präjudizierende Antwort! Aber: *Wissenschaftlicher Fortschritt ist ohne Offenheit und Unvoreingenommenheit nicht möglich, Irrungen und Wirrungen und auch „lebensweltferne selbst-referentielle Systeme“ eingeschlossen.*

5. „Und sie bewegt sich doch!“ soll Galileo Galilei nach der öffentlichen Widerrufung seiner These von der Erdbewegung gesagt haben. Die Geschichte erscheint treffend, ist aber wohl eher anekdotisch zu werten. Dagegen bewegt sich die Didaktik der Mathematik in ganz realer Weise in erheblichem Maße, wobei – das liegt in der Natur der vor allem Geistes- und Bildungswissenschaft oder evtl. auch der Person des Wissenschaftlers – die Frage nach der richtigen Richtung höchst kontrovers diskutiert wird und – auch in Zukunft – werden muss. Bewegung zeigt sich aber nicht nur in der Anzahl an Veröffentlichungen, sondern auch und gerade in der Aufmerksamkeit (teilweise in Form von sehr kritischer Anerkennung bzw. auch Ablehnung) durch die Fachwissenschaft und anderen Wissenschaften, der Neukonzeption vieler Schulbücher, der Aufmerksamkeit – zumindest bzgl. des Mathematikunterrichts bzw. Bildung allgemein – in der Öffentlichkeit und bzgl. der Nachfrage nach Fortbildungen bei Schulen und Lehrkräften. Auch wenn hier vor Kurzem (MGDM 99, S. 29) zu lesen war, dass sich

„Lehrerinnen und Lehrer ... mit Grausen abwenden“, falls sie etwas von der „Mainstream-Didaktik“ (wobei ich nicht so genau weiß, was das ist) mitbekommen, so stellt sich die aktuelle Lage anders dar: Lehrende suchen nach Antworten auf zahlreiche Fragen zum täglichen Unterricht, nach dem adäquaten Einsatz neuer Technologien, nach der Bedeutung der Sprache im Unterricht, nach dem Umgang mit Inklusion, nach handlungsorientiertem und – natürlich – auch einem sog. kompetenzorientierten Unterricht. Und sie suchen und erwarten Antworten insbesondere auch bei bzw. von der Didaktik der Mathematik. Fortbildungen werden mehr nachgefragt als angeboten werden können, wobei Wünsche und Hoffnung – natürlich – nicht stets und von allen erfüllt – häufig auch enttäuscht – werden, gelegentlich auch enttäuscht werden müssen. Man denke nur an die so nicht zu beantwortende aber immer wieder gestellte Frage, ob denn nun der Computereinsatz im Unterricht zu empfehlen oder abzulehnen sei. *Die Geschichte der Wissenschaft gibt zumindest Anlass zu der Hoffnung, dass sich mittel- und langfristig „das Wahre, Gute und Schöne“ durchsetzt, dass die Qualitätsselektion – man mag das kapitalistisch oder darwinistisch oder auch visionär nennen – immer noch nach Erfolg bzw. Misserfolg stattfindet.*

Zum Schluss bleibt die Antwort auf die Ausgangsfrage – wie bei allen philosophischen Überlegun-

gen – (natürlich) offen. Es bleibt aber – um mit dem Abschluss von Schillers Antrittsrede auch zu enden – die Hoffnung der Wissenschaftler: „Ein edles Verlangen muß in uns entglühen, zu dem reichen Vermächtnis von Wahrheit, Sittlichkeit und Freiheit, das wir von der Vorwelt überkamen und reich vermehrt an die Folgewelt wieder abgeben müssen, auch aus unsern Mitteln einen Beitrag zu legen.“

Literatur

- Dewey, J. (1904). *The Relation of Theory to Practice in Education*. Übers. von E. Chr. Wittmann: *Die Beziehung zwischen Theorie und Praxis in der Lehrerbildung*. Beiträge zur Lehrerbildung 10 (1992), H. 3. 293–310
- DMV, GDM & MNU (2008). *Standards für Lehrerbildung im Fach Mathematik*. http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf
- Fladt, K. (1955): *Los von Euklid oder hin zu Euklid?* MU 1, H. 1, 5–10
- Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München: Oldenbourg
- MGDM: *Mitteilung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Nr. 96 (Januar 2014), 97 (August 2014), 98 (Januar 2015), 99 (August 2015)
- Schiller, F. (1789). *Was heisst und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte*. <http://www.schiller-institut.de/seiten/friedrichschiller/ant2.htm>

Hans-Georg Weigand, Universität Würzburg, Didaktik der Mathematik, Campus Hubland Nord, Emil-Fischer-Straße 30, 97074 Würzburg
Email: weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

Einige Antworten zu Repliken zur Stoffdidaktik

Gert Schubring

Zu meinen Bemerkungen, bezüglich der historischen Seite, in den *GDM-Mitteilungen* Nr. 98 zu Wittmanns Kritik einer Vernachlässigung der Stoffdidaktik, sind in der folgenden Nummer 99 fünf Repliken erschienen. Wie Rudolf vom Hofe in seiner Einleitung zu diesem Heft treffend festgestellt hat, sind Diskussionen aufgrund der Natur eines Mitteilungsblattes mit dem Nachteil belastet, dass die notwendige Kürze keine ausführliche Argumentation erlaubt und somit leicht zu unnötigen Zuspitzungen führen kann. Da ich von der Redaktion der Semesterberichte gebeten worden bin, einen historischen Beitrag im für das

nächste Frühjahr geplanten Themenheft zur Stoffdidaktik zu schreiben, werde ich auf die Argumente der Repliken dort näher eingehen können.

Gleichwohl sollen aber hier schon einige kurze Antworten gegeben werden, um anzudeuten, wo solche näheren Argumentationen nötig sein werden, und für einige Richtigstellungen.

Beginnen wir mit dem Beitrag von Hans-Dieter Sill. Obwohl ich in meinem Beitrag ausdrücklich gesagt hatte, daß ich mich für die Nachkriegszeit auf die Bundesrepublik beschränke, moniert er, daß ich nicht auch die SBZ bzw. DDR einbezo-

gen habe. In der Tat bildet dies eine interessante und eigenständige Entwicklung.

Sill beruft sich auf einen Artikel von Peter Borneleit von 2006, wonach die sowjetische Militäradministration 1946 „Lehrstühle für Mathematik-Didaktik“ eingerichtet habe. Solche Aussagen finden sich nicht in Borneleits Artikel. Die sowjetische Militäradministration hatte Besseres zu tun, als „Lehrstühle“ einzurichten. In der Tat hat sie etwas Revolutionäres unternommen: Die gesamte Lehrerbildung für den Primarbereich wurde in die Hochschulen integriert und eine pädagogisch-didaktische Ausbildung für Sekundarschul-Lehrer begründet: beides in neu geschaffenen Pädagogischen Fakultäten.

Diese grundlegenden Strukturreformen für die Lehrerbildung knüpften an zwei Traditionen aus der Weimarer Zeit an: einerseits den Pädagogischen Akademien in Preußen – mit Hochschulstatus, und einer zentralen Wissenschaft: der Pädagogik –, während die Ausbildung in den Schulfächern Dozenten für die „Methodik“ dieser Fächer übertragen war; und andererseits der kurze Zeit in Thüringen realisierten „vollakademischen“ Ausbildung von Lehrern, d. h. für Primar- und Sekundarbereich. Anders als in Preußen war nun in den neuen Pädagogischen Fakultäten nicht nur die Pädagogik mit einem Professor vertreten, es wurden weitere Wissenschaften etabliert, so dass es nunmehr u. a. Professuren gab für systematische Pädagogik, für praktische Pädagogik, für allgemeine Didaktik. Die detaillierte Liste der Stellenbezeichnungen bei Borneleit zeigt aber, dass es für die einzelnen Schulfächer bei „Methodik“ geblieben war – dominant ist die Bezeichnung „Methodik des Mathematikunterrichts“; nur in einem Falle hieß es „Methodik und Didaktik der Mathematik“.

Peter Borneleit hat mich zudem jetzt darauf aufmerksam gemacht, dass damals „das Lehrgebiet Methodik des Mathematikunterrichts“ entweder von einem, eine der Wissenschaften vertretenden, Professor mitübernommen wurde, oder durch Lehrauftrag von einem Lektor oder Dozenten wahrgenommen wurde.

In der DDR-Zeit ist es bei der ausschließlichen Bezeichnung „Methodik des Mathematikunterrichts“ geblieben (während die Stellen zu Professuren aufgewertet wurden).¹

Sill argumentiert nun, dass zwei unterschiedliche Bezeichnungen die gleiche Bedeutung haben können. Das kann durchaus in manchen Fäl-

len zutreffen, nicht aber im Fall von „Methodik des Mathematikunterrichts“ und von „Didaktik der Mathematik“, seit deren Entwicklung zur wissenschaftlichen Disziplin. Leicht einsehbar ist das mit dem von Sill angeführten Beispiel der Abteilung Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR, die Sill als Analogon sieht zum Forschungsinstitut IDM in der alten Bundesrepublik. Außer dem formalen Fakt, dass beides Zentralinstitute waren, gibt es jedoch kaum inhaltliche Analogien. Wie der Beitrag von Karlheinz Weber im deutsch-deutschen Tagungsband eindringlich zeigt, war Materialentwicklung zentrale Aufgabe dieser Abteilung (Weber 2003, 8f.), insbesondere aufgrund der „strikte[n] Praxisorientierung (ibid., 10): „Lehrplan-, vor allem aber Lehrbuch- und Unterrichtshilfenentwicklung sowie Lehrerfortbildung“.

Weiterhin zu kommentieren ist die Begierde, sich eine möglichst lange historische Tradition zuzuschreiben – und so im angenommenen Glanze der alten Griechen zu stehen. Sill sieht daher die Anfänge in Euklids Elementen – während die heutige Mathematikgeschichtsschreibung keine Belege für die traditionelle Überzeugung sieht, die *Elemente* seien als Lehrbuch konzipiert worden. Analog dazu hat Wittmann jetzt seine „Jahrhunderte“ von Mathematik-Didaktik sogar auf „Jahrtausende“ ausgedehnt. Und Peter Bender hat ihm zugestimmt, indem er gleichfalls „Jahrtausende“ postuliert hat.

Gemeinsam ist diesen Traditions-Bemühungen, dass sie nicht die Praktiken von Materialentwicklung scheiden von wissenschaftlicher Theoriebildung.

Was an diesen Bemühungen besonders wundert, ist: Warum ist es nicht viel signifikanter und fruchtbarer, anstatt sich im Glanze der alten Griechen sehen zu wollen – der sich aber nach Plato nur als Abfolge von Schattenbildern erweist –, die Entstehung der wissenschaftlichen Disziplin Mathematik-Didaktik als Folge durchgreifender sozialer Umstrukturierungen des Bildungswesens zu verstehen?

Und noch ein Kommentar, vor der oben angekündigten ausführlicheren Analyse: sowohl Peter Bender als auch Erich Wittmann versuchen, als Markenzeichen und als Markscheide von Stoffdidaktik gegenüber Mathematik-Didaktik hervorzuheben, es erfolge mit ihr „die Entwicklung der Unterweisung in einem Fach aus eben diesem Fach heraus“ (Bender) bzw. „den Mathematikunterricht

¹ In der DDR ist zu einem späteren Zeitpunkt die Grundschullehrer-Ausbildung wieder aus den Hochschulen ausgegliedert und in neuen Pädagogischen Instituten etabliert worden. Die Entwicklung der Strukturen der Lehrerbildung in SBZ und DDR ist offenbar noch nicht aufgearbeitet worden; dies ist sicherlich eine lohnende Aufgabe.

aus dem Fach heraus zu entwickeln“ (Wittmann). Dies ist aber kein Unterscheidungsmerkmal – jede ernsthafte Mathematik-Didaktik geht vom Fache Mathematik aus. Der dafür von Wittmann herangezogene Klagenfurter Philosoph Heintel kritisiert die traditionelle – geisteswissenschaftliche – allgemeine Didaktik, die didaktische Prinzipien propagierte und dachte, damit den Lehrer anleiten zu können.

Schließlich sind noch ein paar Richtigstellungen notwendig, damit sich keine Legendenbildung ergibt. In der Tat scheint seine Erinnerung Wittmann einige Streiche zu spielen. Einen Teil des größten „Kloppes“ hat Rudolf Sträßer schon im vorigen Heft richtiggestellt: Das IDM hat sich keineswegs in den 1990er Jahren selbst aufgelöst. Dieser Zeitraum war auch nicht verbunden mit der „Emeritierung der drei Direktoren“. Der jüngste der drei

Gründerväter, Michael Otte, wurde 2004 emeritiert. Falsch ist auch, was Wittmann anknüpft an Freudenthals famose Polemik 1975 gegen die erste theoretische Arbeit des IDM (die natürlich quer lag zu Freudenthals Ansatz einer *realistic mathematics education*, der Wurzel von PISA und Co.): wenig später seien Günter Pickert und Jürgen Kühl aus Protest aus dem Beirat des IDM ausgetreten. Pickert hat zwar diese Arbeit stark kritisiert, ist aber keineswegs aus dem Beirat ausgetreten. Er schied erst 1980 aus. Und Kühl war damals gar nicht Mitglied des Beirats; er wurde es erst später – bis Mitte der 1980er Jahre, um sich fortan ganz der Pflege seiner kranken Frau zu widmen.

Gert Schubring, Universität Bielefeld, Postfach 100 131, 33501 Bielefeld. Email: gert.schubring@uni-bielefeld.de

Ein Vorschlag zur Güte

Erich Ch. Wittmann

Als ich in MGDM 99/2015 die Replik des geschätzten Kollegen Rudolf Sträßer auf meinen Artikel im gleichen Heft gelesen habe, fiel mir spontan der Disput eines Pärchens ein, den ich im Zug unfreiwillig mitbekommen habe:

Er: „Könnten wir nicht ab und zu auch Fleisch essen?“

Sie: „Du willst immer nur Fleisch!“

Wenn Rudolf Sträßer in seine Replik nicht das Diagramm aus meinen „Grundfragen“ aus dem Jahr 1974 sondern das erweiterte Diagramm aus meinem Artikel über die Mathematikdidaktik als design science von 1992 eingebaut hätte, wäre auf einen Blick zu sehen gewesen, dass mein Verständnis dieser Disziplin keineswegs nur den „Kern“ einschließt, sondern ausdrücklich auch „Bezugsbereiche“, die Beziehungen zu anderen Disziplinen stiften. Zu diesem umfassenden Konzept von Mathematikdidaktik stehe ich nach wie vor. Meine Interventionen in den MGDM sind daher keineswegs von der Absicht getragen, diese Bezüge zu reduzieren, wie in der Replik insinuiert wird. Vielmehr plädiere ich dafür, diesen Rahmen voll auszufüllen. Dazu gehört aber, dass die m. E. geschwächten Bezüge der Mathematikdidaktik sowohl zur Bezugswissenschaft Mathematik als auch zur Praxis

wieder gestärkt werden und zwar so, dass gleichzeitig die Relevanz der Fachwissenschaft für die Praxis deutlich wird (die keineswegs durch das „Fach“ per se gewährleistet ist, wie naive Mathematiker annehmen).

Man kann zur Ausrichtung der Mathematikdidaktik im Einzelnen sicherlich geteilter Meinung sein. Aber auch wer den Schwerpunkt der Mathematikdidaktik in ihre Bezugsbereiche verlegt, wie es nach meiner Einschätzung in der Forschung heute weithin geschieht, darf sich der Verpflichtung, die wir als Mathematikdidaktiker gegenüber der Praxis und der Lehrerbildung haben, nicht entziehen. M. E. muss in die Diskussion über die praktische Bedeutung der heutigen Veröffentlichungen im JMD auch die breite Lehrerschaft einbezogen werden. Es liegt mir zwar fern, Äußerungen aus der Praxis für bare Münze zu nehmen und die Praxis alleine über den Nutzen der Mathematikdidaktik entscheiden zu lassen. Aber ernst nehmen muss man die Rückmeldungen aus der Praxis schon.

Ich möchte dazu folgenden Vorschlag unterbreiten:

Für die gleiche Gruppe von (ca. 100) Lehrerinnen und Lehrern werden zwei je 8-teilige Fortbildungskurse mit gleicher Zielsetzung angeboten. Der eine Kurs wird schwerpunktmäßig unter Bezug auf Ergebnisse von Forschungen durchge-

führt, wie sie momentan im JMD dominieren, der andere schwerpunktmäßig nach den Vorstellungen von Mathematikdidaktik als design science. Mit Methoden der empirischen Forschung (zweiter Art) wird ein Fragebogen erstellt, in dem die beiden Kurse von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nach verschiedenen Gesichtspunkten bewertet werden.

Für die weitere Diskussion innerhalb der community dürften die Ergebnisse des vorgeschlagenen Projekts hilfreich sein. Aber vielleicht täusche ich mich. Das heutige System „Mathematikdidaktik“ könnte im Verbund mit anderen Disziplinen,

insbesondere der Bildungsforschung und der Kognitionspsychologie, bereits ein solches Maß an Selbstreferenz erreicht haben, dass es seine Ziele und Zwecke im Wesentlichen aus sich heraus definiert und die Frage nach der Praxisrelevanz allein dadurch suspendiert wird, dass die gleichen Personen in der Lehrerbildung unter Zurücklassung ihrer „Forschungsdidaktik“ praxisnahe Angebote machen (bei denen sie sich bei der konstruktiven Entwicklungsforschung kräftig bedienen).

Erich Ch. Wittmann, TU Dortmund, IEEM, 44221 Dortmund, Email: wittmann@math.tu-dortmund.de

(Mathematisches) Modellieren als Axiomatisieren – eine ungewohnte Sichtweise?

Horst Hischer

Ausgangssituation und Ziel

Hans-Jürgen Bandelt hat in Heft 99 der *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* eine Diskussion über didaktische Aspekte des Modellierens eröffnet, an die hier unter einem weiteren Gesichtspunkt angeknüpft sei:

Seit rund einem Vierteljahrhundert gibt es in der Didaktik der Mathematik zahlreiche Bemühungen und Vorschläge dahingehend, wie man im Mathematikunterricht anstelle von Aufgaben, die de facto nur *Scheinanwendungen* zwecks Verpackung vorhandener Formeln oder Verfahren sind, alternativ im Sinne eines „Realitätsbezugs“ *echte Anwendungen* behandeln kann. Das führte bekanntlich zum *Modellieren* als didaktischem Konzept und fand auch bereits Eingang in Lehrpläne, Richtlinien und Schulbücher.

Bei diesem Konzept stehen nicht etwa denkbare Anwendungen bereits vorliegender mathematischer Verfahren auf „reale“ Probleme außerhalb ihrer selbst (oft „Rest der Welt“ genannt) im Fokus. Vielmehr sollen hierbei Situationen von nicht vordergründig mathematisch erscheinendem Typ den Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden. Ein im Prinzip sehr anspruchsvolles Ziel!

Nun besteht kein Zweifel daran, dass die *Wissenschaft Mathematik* auf den gerade erwähnten

Rest der Welt anwendbar ist, wobei außermathematische Probleme und Fragestellungen sogar oft erst zur Entwicklung bzw. Weiterentwicklung mathematischer Methoden (und auch Theorien) geführt haben, was schon seit Langem z. B. für die Physik gilt. Insbesondere ist es in den letzten Jahrzehnten progressiv zu einer *Mathematisierung der Wissenschaften* gekommen.¹

Andererseits verfügt die Mathematik (wie auch die Philosophie) über die ihr *wesentliche* Möglichkeit, zu erforschende Gegenstände auch selber konstruieren zu können und dies auch zu tun, nämlich als *Wirklichkeit eigener Art*, also gemäß Wittgenberg als *Wirklichkeit sui generis*. Auch das ist dann ein „Realitätsbezug“ – wenn auch ein gänzlich anderer als der üblicherweise im didaktischen Kontext von „Modellierung“ gemeinte.

Seit ihren Anfängen in vorgeschichtlicher Zeit bis heute umfasst die Mathematik das Spannungsfeld zwischen zwei Seiten einer Medaille: eine *spielerische, philosophische Seite*, die als „Wirklichkeit sui generis“ *nicht auf Nutzen und Anwendung gerichtet* ist und die zur reinen Mathematik gehört, aber andererseits auch eine *utilitaristisch-technische Seite*, die *auf Anwendung gerichtet* ist und die dann das angesprochene „Modellieren“ betrifft und die zugleich ebenfalls Anregungen zur Entwicklung der Mathematik beigesteuert hat. So sind damit *beide*

¹ Vgl. z. B. die vielfältigen Beiträge einer Vortragsreihe an der ETH Zürich 1981 in [Hoyningen-Huene 1983].

Seiten – *Spiel* und *Anwendung* – *gemeinsam* kennzeichnend für die Mathematik.

Bandelt geht in seinem o. g. Beitrag u. a. auf den „Heiratssatz“ und die „Eulertour“ (also das Königsberger Brückenproblem) ein und weist ausdrücklich darauf hin, dass dies *keine* Beispiele für reale Anwendungen und schon gar nicht für „Modellierung“ sind. – Vielmehr liegen hier Gedankenspiele im Sinne von „Mathematik als Spiel des Geistes“ vor, die vorzüglich sowohl der Förderung und dem *Entwickeln mathematischen Denkens* als auch der *Freude an der Mathematik* dienen.

Unterstellt man gemäß Wittenberg als ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts die *Vermittlung eines gültigen Bildes der Mathematik*, so sind demgemäß bei dessen Inszenierung diese *beiden* Aspekte („Anwendung“ und „Spiel“) zu berücksichtigen. Konsequenterweise sollte man vermeiden, dem utilitaristischen Zeitgeist folgend den Mathematikunterricht damit *rechtfertigen* zu wollen, dass Mathematik doch nützlich und anwendbar sei. Odo Marquard kritisiert darüber hinaus grundsätzlich eine solche „allgegenwärtige“ Haltung als „Ubiquisierung des Rechtfertigungsverlangens“:²

Denn heute bedarf offenbar alles der Rechtfertigung: [...] nur eines bedarf – warum eigentlich? – keiner Rechtfertigung: die Notwendigkeit der Rechtfertigung vor allem und jedem.

Das sei durch folgende Auffassung flankiert:

Mathematik bedarf ebenso wenig einer Rechtfertigung wie Dichtung, Literatur, Kunst und Musik!

Die nachfolgenden Betrachtungen gehen von dem Fakt aus, dass „Modellieren“ im außerschulischen Bereich in aller Regel *keine rein mathematische Tätigkeit* ist, sondern meist einer *transdisziplinären Kooperation* mit Experten aus den zu modellierenden Gebieten bedarf. Das führt dazu, dass im Mathematikunterricht – wenn man der proklamierten Idee eines Modellierens folgt – in nur beschränkter Weise ernsthaft modelliert werden kann. Zwar sind fächerübergreifende Strukturen wie Projekte dafür geeignet, jedoch sind diese im Schulalltag aus vielerlei Gründen nur selten umsetzbar.

Nun gibt es bekanntlich im *Mathematikstudium* auch Lehrveranstaltungen zum „Modellieren“, worauf Bandelt in seinem Beitrag kritisch-konstruktiv eingeht. Solche Lehrveranstaltungen dienen dann aber genau genommen oft nur dem sog. „Mathematischen Modellieren“.

Als Fazit zielt dieser Essay auf folgende Aussage: Das eigentlich „Mathematische“ am Modellieren ist das *Mathematisieren*, das aber in seiner *technischen* und *handelnden* mathematischen Bedeutung im Wesentlichen ein *Axiomatisieren* ist.

1 Zum mathematischen Modellbegriff

Neben dem seit vielen Jahren engagiert propagierten Ziel eines „Modellierens im Mathematikunterricht“ – in Verbindung mit der Bildung von „Modellen“ – scheint in der Schule und auch im Studium zunehmend aus dem Blick zu geraten oder schon geraten zu sein, dass seit gut einem Jahrhundert mit „Modell“ ein grundlegender Begriff der Mathematik bezeichnet wird, der fern jeder außermathematischen Anwendung zu sehen ist:

Im Rahmen der (in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begonnenen und dann in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts weitergeführten) Bemühungen um eine axiomatische Grundlegung der Mathematik, basierend auf der zugleich entwickelten axiomatischen Mengenlehre und der formalen Logik, spielen „Modelle“ eine wesentliche Rolle. Doch was ist hierbei eigentlich unter einem „Modell“ zu verstehen?

Oliver Deiser bietet in seinem aktuellen Werk eine *intuitive Eingangsdefinition* an:³

Ein Modell ist intuitiv eine Welt für ein mathematisches Axiomensystem, ein Bereich von Objekten, innerhalb dessen die Axiome gelten, oder etwas weniger hochgestochen, ein konkretes Beispiel.

So ist z. B. (M, \cdot) mit $M := \{-1, 1\}$ und der normalen Multiplikation eine (wenn auch recht triviale) Gruppe, denn *alle Gruppenaxiome* werden „erfüllt“ (sie gelten ohne Ausnahme). (M, \cdot) ist somit ein *Modell* für das Axiomensystem einer Gruppe. Damit können sich die Gruppenaxiome logisch nicht widersprechen: Ein solches Axiomensystem heißt daher *widerspruchsfrei*.

Andererseits gilt bekanntlich: Wird ein *neues Axiomensystem* (wie auch immer) gebildet, und gelingt es ohne Konstruktion eines Modells, zu beweisen, dass dieses System widerspruchsfrei ist, so weiß man, dass ein Modell existiert, auch wenn noch kein einziges konkret gefunden wurde.

Beispielsweise führt etwa die Vorstellung eines „Kettenmodells“



für die „Struktur“ der – wie auf einer nicht ab-

² [Marquard 1986, 11]

³ [Deiser 2010, 153]

brechenden Perlenkette aufgefädelt gedachten – natürlichen Zahlen zu den Dedekind-Peano-Axiomen.⁴

Ist dieses Axiomensystem widerspruchsfrei? Falls man zu akzeptieren bereit ist, obige Visualisierung des Aufeinanderfolgens als ein konkretes *Modell* aufzufassen, so ist man fertig.

Alternativ kann man versuchen, *auf gesicherter Grundlage ein Modell zu konstruieren*. So erzeugte z. B. 1923 John von Neumann (1903–1957) iterativ die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$,⁵ die erkennbar und beweisbar alle Dedekind-Peano-Axiome erfüllt, wobei sich die Möglichkeit dieser Konstruktion auf die axiomatische Mengenlehre stützt. Sofern diese widerspruchsfrei ist, würde also ein Modell für das Dedekind-Peano-Axiomensystem existieren, das damit ebenfalls widerspruchsfrei wäre. Leider lässt sich die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre nach einem grundlegenden Satz von Kurt Gödel aus dem Jahre 1931 nicht mit den Mitteln der Mengenlehre beweisen – obwohl die bekanntesten Axiomensysteme der Mengenlehre heute als widerspruchsfrei gelten.⁶

Die Widerspruchsfreiheit der Dedekind-Peano-Axiome stützt sich also auf die – nicht beweisbare – Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems der Mengenlehre, wobei diese Axiome lediglich *plausibel* sind. Immerhin lässt sich (aufwendig) beweisen, dass je zwei Modelle für das System der Dedekind-Peano-Axiome *isomorph* sind,⁷ was bedeutet, dass sie sich nur in der Schreibweise unterscheiden.

Die natürlichen Zahlen sind also *einzigartig*, und Entsprechendes gilt z. B. für die *reellen Zahlen*. Solche Axiomensysteme, bei denen je zwei Modelle isomorph sind, heißen *monomorph* oder *kategorisch*. David Hilbert bewies 1899 erstmalig, dass das *Axiomensystem der euklidischen Geometrie monomorph* ist, und auch die Axiomensysteme für die reellen Zahlen sind monomorph. Hingegen sind z. B. die Axiomensysteme für Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume nicht monomorph.

Was ist ein *Axiomensystem*? Man unterscheidet heute vielfach nicht mehr zwischen Axiomen und Postulaten: Vereinfacht gesehen sind *Axiome* quantifizierte Aussageformen, die als *Grundsätze* am Beginn einer axiomatisch begründeten mathematischen Theorie stehen und die man *akzeptiert*, um sie für deduktive Beweise so nutzen zu können, als wären es wahre Aussagen. Das (Er-)Finden und Aufstellen eines sinnvollen widerspruchsfrei-

en Systems von Axiomen als *Grundlage einer mathematischen Theorie* nennt man „*Axiomatisieren*“, so wie man z. B. eine konkrete Geometrie axiomatisiert.

Ergänzend sei angemerkt, dass ein Axiomensystem *vollständig* heißt, wenn es bei Hinzufügung eines weiteren Axioms, das mit den bereits vorhandenen nicht beweisbar (also nicht „deduzierbar“) ist, *widerspruchsvoll* wird und damit also kein Modell mehr besitzt. Beispiele hierfür sind die Axiomensysteme für die *reellen Zahlen* und für die *euklidische Geometrie*.

2 Modellierung in der Mathematik

„Modell“ und „Modellierung“ sind aktuelle und etablierte Termini in der Didaktik der Mathematik. Jedoch scheint beides nichts mit dem zu tun haben, was in der Mathematik unter einem *Modell eines Axiomensystems* verstanden wird. Oder etwa doch? Wird *innerhalb* der Mathematik *modelliert*?

So zeigt sich zunächst, dass in Bezug auf Axiomensysteme *Modelle* in der Mathematik unter den folgenden beiden Aspekten auftreten:

(1) *Axiomatisierung*: „Modell“ als axiomatisch zu beschreibende vorhandene *Leitstruktur*.

Ziel: Entwicklung *eines (widerspruchsfreien) Axiomensystems*, dem diese Leitstruktur genügt.

(2) *Verifizierung*: „Modell“ als (zu findende oder zu konstruierende) konkrete *Teststruktur*, die ein vorliegendes Axiomensystem erfüllt.

Ziel: *Überprüfung eines gegebenen Axiomensystems* auf Widerspruchsfreiheit.

Ein Beispiel für (1) ist das o. g. *Kettenmodell* der natürlichen Zahlen (das dann zum Dedekind-Peano-Axiomensystem führt), hingegen ist das *von-Neumann-Modell* $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$ ein Beispiel für (2).

Und was wäre nun *in der Mathematik* unter „*Modellieren*“ zu verstehen? – Sprachlich ist das zunächst eindeutig: *Modellieren ist die Herstellung eines Modells*. Aber „Modell wovon“?

Wenn man im Fall (2) zu einem vorliegenden Axiomensystem ein Modell konstruiert oder dieses findet, so hat man damit wohl im Wortsinn etwas *modelliert*. Im Fall (1) hingegen liegt bereits ein Modell vor, das nun *axiomatisiert* worden ist.

Wenn dann auf diese Weise ein so entstandenes Axiomensystem auf die Existenz weiterer (und möglichst nicht-isomorpher) Modelle unter-

⁴ Ausführlich dargestellt in [Hischer 2012, 209 ff.].

⁵ [Ebbinghaus 1983, 303]

⁶ [Ebbinghaus 1983, 306]

⁷ Beweis z. B. in [Hischer 2012, 226], eine Definition dieser „Isomorphie“ findet sich dort zuvor.

sucht wird und solche gefunden werden, so hat man aber auch hier *modelliert* (Modelle erzeugt). Und hat man dabei tatsächlich nicht-isomorphe Modelle gefunden, die nicht den Erwartungen entsprechen, so kann man versuchen, dem durch Modifikation dieses Axiomensystems abzuhelfen: Es wird dann wieder *axiomatisiert*. Diese Aktionen des *Modellierens* und *Axiomatisierens* können *aufeinander folgen*, was Assoziationen an den „Modellierungskreislauf“ wecken mag, den Bandelt aber als „Ablauf“ bezeichnet, denn der „Kreislauf“

hatte eigentlich einen engeren Kontext und wurde von den Mathematikdidaktikern verabsolutiert. Ich würde selbst nie von einem Kreislauf sprechen wollen. Und ein „Ablauf“ kann je nach Gebiet etwas anders sein.⁸

Nun geht es in der Axiomatik nicht um „Anwendung der Mathematik auf den Rest der Welt“, denn so ein *Modellierungsablauf* ist hier (zumindest zunächst) nur innermathematisch relevant. Dieser *Aspekt des Modellierens* spielt aktuell in der Didaktik der Mathematik *expressis verbis* keine Rolle.

Vielmehr geht es dann *dort* meist um die Untersuchung von außermathematischen Phänomenen und Situationen usw. *mit Hilfe der Mathematik*: Man macht sich ein erstes „Bild“ von einem bestimmten Ausschnitt der „Realität“, bildet sich also ein gedachtes *Modell* von diesem *Ausschnitt* (einem „Realmodell“), um dieses dann mathematisch zu beschreiben, was also ein *Mathematisieren* ist – und zunächst als *Umkehrung* und dann sogar als *Erweiterung* von „Anwendung“ auffassbar ist. Das so gebildete *mathematische Modell* besteht dann i. d. R. aus einem System von Gleichungen, Ungleichungen, Differentialgleichungen, . . . , ergänzt um Anfangs- und Randbedingungen – und das sind *quantifizierte Aussageformen*.

Ein solches System quantifizierter Aussageformen ist damit strukturell *wie ein Axiomensystem aufzufassen*, das sich im Modellierungsablauf bei der *Verifikation* mit Bezug auf die „Realität“ entweder als *widerspruchsfrei* oder *widerspruchsvoll* (also „unangemessen“ im Sinne von „nicht passend“) zu erweisen hat, um dann ggf. bedarfsweise angepasst und „verbessert“ zu werden.

Da das „Mathematisieren“ (also das *mathematische Modellieren*) in der außerschulischen Praxis *nur ein Teil* des (umfassenderen!) dort praktizierten „Modellierens“ ist, kann festgestellt werden:

These 1: „*Mathematisches Modellieren*“ entspricht in technisch-formaler und handelnder Hinsicht dem

„*Axiomatisieren*“.

These 2: „*Modellieren*“ ist jedoch in der Regel *allein aus der Mathematik heraus nicht leistbar*.

These 1 wurde bereits ausführlich begründet. These 2 wird schon dadurch einleuchten, dass einerseits zwingend solide Fachkenntnisse aus dem Fachgebiet oder den Fachgebieten des zu „modellierenden“ Phänomens erforderlich sind, was in der Praxis in aller Regel eine *transdisziplinäre Zusammenarbeit* erfordert (s. o.), weil Mathematiker nur selten über eine je notwendige solide situative Expertise verfügen (können). Und andererseits verfügen Experten aus dem zu modellierenden Themenbereich meist nicht über erforderliche umfangreiche mathematische Kenntnisse.

Liegt jedoch z. B. ein Phänomen oder eine Situation aus der Physik vor, so ist eine Modellierung meist ohne Beteiligung von Mathematiker(inne)n zu bewerkstelligen, weil in der (forschenden) Physik die dazu erforderliche Mathematik zum Alltagswerkzeug gehört bzw. dort erst entwickelt wird – die Physik hat sogar wesentlich zur (Weiter-)Entwicklung der Mathematik beigetragen: So führte etwa die in der Physik erfundene Diracsche Deltafunktion zur Entwicklung der nunmehr mathematischen Theorie der Distributionen, und Ähnliches gilt für andere mathematische Gebiete wie z. B. für die Differentialgleichungen.

3 Modellierung in der Physik

Die *Physik* ist diejenige Disziplin, in der „aus eigener Kraft“ *par excellence modelliert* (und zwar nicht nur mathematisch modelliert!) wird und werden kann, und der *Modellierungsablauf* wird in der Physik wie selbstverständlich praktiziert. So sind die in der Physik üblichen und typischen *Idealisierungen* physikalischer Situationen (wie z. B. *Massenpunkt* und *Fadenpendel*) stets *Modellierungen*.

Auch z. B. der elektrische Widerstand und der elektrische Strom sind über Modellvorstellungen zu erfassen, die sich erst bewähren mussten (oder auch nicht). Ferner denke man an erste „Atommodelle“ (Demokrit, Dalton, Bohr) und (zunächst) gegensätzliche Modellvorstellungen von „Licht“ („Teilchen vs. Welle“), die erst später „versöhnt“ werden konnten. Und die im 19. Jahrhundert gängige Modellvorstellung eines fiktiven „Äthers“ musste später komplett verabschiedet werden.

Hervorhebenswert sind ferner interpretierende und weiterführende Theorien wie die Relati-

⁸ Hans-Jürgen Bandelt, Universität Hamburg, in einer Mitteilung an mich vom 23. 9. 2015.

vitätstheorie (mittels Modellvorstellung und vor allem mit wesentlicher mathematischer Modellierung), die bis dahin ungeahnte Vorhersagen möglich machte – und zuletzt die Theorie von Peter Higgs, der in seiner Theorie in den 1960er Jahren das nach ihm benannte neue „Teilchen“ („Higgs-Boson“) vorhersagte, dessen Existenz dann 2013 endlich experimentell bestätigt werden konnte, wofür er im selben Jahr den Nobelpreis erhielt.

Modellierungen sind wesentliche Triebfedern zur Weiterentwicklung der Physik!

Ohne Mathematik wären viele wichtige physikalische Phänomene nicht modellierbar gewesen, allerdings hätten viele mathematische Modelle auch nicht allein aus der Mathematik heraus entstehen können – denn hier liegen Realmodell und Mathematisierung fachlich quasi „in einer Hand“.

Es ist noch anzumerken, dass bis in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts hinein eine enge (auch personal repräsentierte) Verwandtschaft zwischen Mathematik und Physik bestand, was sich auch darin zeigte, dass beide Disziplinen universitär zur selben Fakultät oder zum selben Fachbereich gehörten, was heute nicht mehr der Normalfall ist – und entsprechend gehört es heute nicht mehr zum Normalfall, dass Physik ein übliches Zweitfach für Mathematiklehrkräfte ist (und vice versa).

4 Heinrich Hertz: Modellieren als Axiomatisieren

Das Bewusstsein für Modellierung in der Physik wird dem genialen, früh verstorbenen Physiker Heinrich Hertz (1857–1894) mit seinem 1894 posthum erschienenen fundamentalen Werk *„Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt“* zugeschrieben. Er spricht allerdings nur selten expressis verbis von „Modell“: zweimal in der 49 Seiten umfassenden Einleitung, dann allerdings 29-mal im „Zweiten Buch“ beim drei Seiten umfassenden Thema „Dynamische Modelle“, und sonst nirgends explizit, sondern nur implizit.

Gemäß Hertz machen wir uns „(Schein-)Bilder“ von den „äußeren Gegenständen“ als „unsere Vorstellungen von den Dingen“, die „wie Modelle“ anzusehen sind, so dass wir daraus „Folgen“ vorhersagen können. „Modell“ ist hier offenbar zunächst als konkretes, fassbares Objekt (wie z. B. ein *Flugzeugmodell*) anzusehen, das beispielhaft und *anschaulich* für etwas anderes „Reales“ (bzw. auch für etwas „Gedachtes“) steht, wodurch aber „Modell“ schließ-

lich zur *Metapher* auch für etwas nicht Greifbares wird.

Hertz' Darstellung ist streng mathematisch aufgebaut und erscheint wie eine axiomatisch aufgebaute Theorie. Dazu passen insbesondere seine leistungswerten Ausführungen beispielsweise zu „Dynamischen Modellen“.⁹

5 Fazit

Eine Analyse sowohl des für die *Wissenschaft Mathematik innermathematisch* typischen Axiomatisierens als auch des für *Anwendungen der Mathematik* auf außermathematische Fragestellungen zunehmenden *mathematischen Modellierens* (durch „Mathematisierung der Wissenschaften“, s. o.) zeigt, dass zwischen beiden Vorgehensweisen *kein grundsätzlicher technischer Unterschied* besteht, dass jedoch bei der Anwendung dieses Modellierens auf den „Rest der Welt“ meist nicht-mathematische Fachkenntnisse erforderlich sind, die *in der außerschulischen Praxis vornehmlich über transdisziplinäre Zusammenarbeit einzubringen* sind.

Im *Mathematikunterricht* ist für das *Modellieren realer Situationen* dementsprechend prinzipiell eine *fachübergreifende projektartige Zusammenarbeit erforderlich*, die oft nur schwer realisierbar sein wird. Nur bei günstigen personellen und thematischen Situationen wird ein solches „Modellieren“ im Mathematikunterricht gelegentlich auch ohne einen solchen Fachübergreifend redlich möglich sein. Dies ist z. B. bei geometrienahen oder manchen stochastischen Situationen denkbar.¹⁰

Für einen kreativen, die individuellen Fähigkeiten und Interessen der Schülerinnen und Schüler *fördernden und fordernden* gymnasialen Mathematikunterricht benötigen wir aber auch *Freiheit im Bildungsprozess* in Verbindung mit dem Vertrauen auf fachliche Expertise der Lehrkräfte, um es zu ermöglichen, ein Thema wie „Modellieren“ ggf. anders als über „Realbezug“ zu behandeln und damit nicht nur die Nützlichkeit der Mathematik zu betonen, sondern auch deren Schönheit.

So wird hier abschließend die These vertreten, dass die *Technik des mathematischen (!) Modellierens* (also das *Mathematisieren* auf der Basis eines vorliegenden „Realmodells“ wie z. B. des erwähnten *Kettenmodells* für die natürlichen Zahlen) im Mathematikunterricht *auch durch Erfahrung und Übung im Axiomatisieren* (als einem tastenden, nicht aber starr und geradlinig ablaufenden Prozess) erlernbar ist. Bereits in den 1960er und 1970er Jah-

⁹ [Hertz 1894, 197]

¹⁰ So z. B. endliche Geometrien wie die „Mühlegeometrie“ in [Schupp 2002, 331–339].

ren wurden in der Didaktik der Mathematik viele Vorschläge zu entsprechenden Axiomatisierungsübungen entwickelt.

Damit wird man dann – so die hiermit intendierte Hoffnung – die von Bandelt so bezeichneten und kritisierten „Scheinmodellierungen“ vermeiden und zugleich aber gemäß Arnold Kirsch „intellektuell ehrlich“ vorgehen können:¹¹

Intellektuell ehrliches Argumentieren ist auf vielen Niveaus möglich. Was wir fordern ist, daß das einmal beanspruchte Niveau des Argumentierens im Unterricht durchgehalten wird, ja bei Bedarf gesteigert – und nicht nach einigen Alibi-Stunden wieder preisgegeben wird.

6 Literatur

- Bandelt, Hans-Jürgen [2015]: Modellbildung versus Modellieren und Scheinmodellierung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 2015, 99, 8–20.
- Deiser, Oliver [2010]: *Einführung in die Mengenlehre*. Berlin / Heidelberg: Springer (3., korrigierte Auflage).
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter [1988]: *Mengenlehre und Mathematik*. In: Ebbinghaus, Heinz-Dieter & Hermes, Hans & Hirzebruch, Friedrich & Koecher, Max & Mainzer, Klaus & Neukirch, Jürgen & Prestel, Alexander & Remmert, Reinhold:

- Zahlen*. Berlin / Heidelberg / New York / London / Paris / Tokyo: Springer 1988 (2., überarbeitete und ergänzte Auflage; 1. Auflage 1983), 298–319.
- Hermes, Hans & Markwald, Werner [1962]: *Grundlagen der Mathematik*. In: Behnke et al.: *Grundzüge der Mathematik*. Band I: *Grundlagen der Mathematik – Arithmetik und Algebra*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1962, 1–89.
- Hertz, Heinrich [1894]: *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt. Mit einem Vorwort von H. v. Helmholtz*. Leipzig: Johann Ambrosius Barth.
- Hischer, Horst [2012]: *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur, Funktion, Zahl*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hoyningen-Huene, Paul (Hrsg.) [1983]: *Die Mathematisierung der Wissenschaften*. Zürich: Artemis.
- Kirsch, Arnold [1976]: Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. *Didaktik der Mathematik*, 4(1976)2, 867–105.
- Marquard, Odo [1986]: *Entlastungen. Theodizeemotive in der neuzeitlichen Philosophie*. In (derselbe): *Apologie des Zufälligen*. Philosophische Studien. Stuttgart: Reclam, 1986, 11–32.
- Schupp, Hans [2002]: *Thema mit Variationen*. Hildesheim: Franzbecker.
- Wittenberg, Alexander Israel [1990]: *Bildung und Mathematik: Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach*. Stuttgart: Klett (2. Auflage; 1. Auflage 1963).

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de

¹¹ [Kirsch 1976, 104]

Einladung zur Mitgliederversammlung der GDM

Pädagogische Hochschule Heidelberg, 10. 3. 2016

Ort: PH Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561
Beginn: 16:00 Uhr

Tagesordnung:

- TOP 1 Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung
TOP 2 Bericht des Vorstands
TOP 3 Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers
TOP 4 Entlastung des Vorstands

- TOP 5 Wahlen
2. Vorsitzende/r, Schriftführer/in, Beirat
TOP 6 MathEduc und Madipedia
TOP 7 Zeitschriften
1. Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)
2. ZDM
3. Mathematica Didactica und Der Mathematikunterricht
TOP 8 Verschiedenes

Andreas Vohns
Schriftführer

Interview mit Hans-Jürgen Elschenbroich, Gilbert Greefrath und Wolfram Koepf

Mathematik-Kommission Übergang Schule–Hochschule

Stephanie Schiemann

Die Mathematik-Kommission ist ein Gremium aus Vertretern von DMV, GDM und MNU, das gemeinsam die Belange rund um die Übergangsproblematik von der Schule in die Hochschule im Blick hat, sich regelmäßig zu Wort meldet und auch gemeinsame Stellungnahmen verfasst. Die jetzigen Mitglieder sind:

- DMV: Volker Bach (TU Braunschweig), Wolfram Koepf (Uni Kassel, Sprecher) und Jürg Kramer (HU Berlin und Leiter DZLM),
- GDM: Bärbel Barzel (Uni Duisburg-Essen), Rolf Biehler (Uni Paderborn, Direktor khdm) und Gilbert Greefrath (Uni Münster, stellvertretender Sprecher),
- MNU: Max Hoffmann (Master-Student Uni Paderborn), Henning Körner (Studienseminar Oldenburg) und Hubert Langlotz (Elisabeth-Gymnasium Eisenach, stellvertretender Sprecher).

Auf der DMV-Jahrestagung in Hamburg fand das Interview zu Aufgaben und aktuellen Entwicklungen der Kommission statt. Es beteiligten sich der Sprecher Wolfram Koepf (WK), sein Stellvertreter Gilbert Greefrath (GG) und der langjährige stellvertretende MNU-Sprecher Hans-Jürgen Elschenbroich (HJE).

Details zur Kommission, auch bislang verfasste Stellungnahmen, findet man auf der eigens erstellten Website unter www.mathematik-schule-hochschule.de, eine Vorstellung der Kommission in den Mitteilungen 2012-1. Im Heft 2012-4 ist die gemeinsame Pressemeldung der Verbände zum Thema „Abiturstandards Mathematik veröffentlicht – Chance vertan?“ zu finden.

Lieber Herr Koepf, seit Beginn 2011 sind Sie Sprecher der gemeinsamen Kommission von DMV, GDM und MNU. Was hat Sie an der Aufgabe gereizt? Warum haben Sie sich entschlossen, hier an der Schnittstelle aktiv zu werden?

WK: Ursprünglich habe ich gymnasiales Lehramt studiert und mich erst spät für eine Hochschulkarriere entschieden. Das Interesse an guter akademischer Lehre und gutem Schulunterricht war daher immer bei mir vorhanden, und ich habe neben mathematischen Forschungsartikeln auch einige didaktische Aufsätze geschrieben. Als ich im Jahr 2000 eine Professur an der Universität Kassel antrat, habe ich im Auftrag der Universitätsleitung ein Konzept für mathematische Vorkurse, vor allem für die Ingenieurausbildung, entwickelt,

das seitdem umgesetzt und weiterentwickelt wurde. Dies war aufgrund der Heterogenität der Studienanfänger dringend erforderlich.

Als die KMK dann eine Arbeitsgruppe einrichtete, die die Bildungsstandards der Abiturstufe ausarbeiten sollte, war schnell klar, dass die einschlägigen Verbände in diesen Prozess leider nicht eingebunden wurden. Daher war ich als Beauftragter des Webportals Mathematik.de und Mitglied des DMV-Präsidiums mit dabei, als sich Mitglieder der drei führenden Fachverbände DMV, GDM und MNU zusammaten, um ihren Sachverstand in diesen Prozess einfließen zu lassen.

Wie kam es zur Gründung der Kommission?

HJE: Die Gründung der Kommission erfolgte nicht speziell aufgrund der Bildungsstandards, sondern hatte einen Vorlauf. Im Jahr der Mathematik 2008 gab es unglaublich viele Aktionen und Aktivitäten, in die auch die jeweiligen Verbände eingebunden waren. Das hat die Zusammenarbeit der Verbände sehr befördert. Die vielfältige praktische Zusammenarbeit der Verbände im Jahr der Mathematik und im Jahr danach führte zu dem Wunsch, eine solche Zusammenarbeit fortzuführen und zu institutionalisieren. Denn wir standen vor der unerfreulichen Situation, dass in Bildungsfragen die jeweilige Institution sich aussuchen konnte, ob sie als Experten mal lieber den einen oder den anderen Verband einbeziehen wollte. Gegebenenfalls konnte es dann sogar passieren, dass es unterschiedliche Stellungnahmen gab, die sich gegenseitig neutralisierten.

Uns wurde klar: Wenn wir gehört werden und überhaupt einen Einfluss nehmen wollen, müssen wir mit einer Stimme sprechen.

Nun sind schon drei Jahre ins Land gezogen. Einige Teilnehmer haben schon gewechselt. Wie funktioniert der Prozess? Wer entscheidet über die Zusammensetzung der Gruppe? Wie oft trifft sie sich? Ist eine Mitarbeit für weitere Interessierte – vielleicht auch nur bei bestimmten Themen – möglich?

GG: Die Gruppe ist paritätisch aus den drei Verbänden DMV, GDM und MNU besetzt. Jeder Verband entscheidet selbst, welche drei stimmberechtigten Mitglieder in die Kommission entsandt wer-

den. Die Kommission selbst wählt dann ihre Sprecher und deren Vertreter. Sie trifft sich etwa viermal im Jahr. Die Beschlüsse der Kommission werden in der Regel einstimmig gefasst, was auch gegenseitig Kompromisse erfordert. In Fragen des Übergangs Schule–Hochschule wird die Kommission mittlerweile immer häufiger als Gesprächspartner angefragt. So gab es beispielsweise bei der DMV-Tagung 2015 in Hamburg eine Podiumsdiskussion zum Thema „Wie viel Mathematik brauchen Studierende der MINT-Fächer?“, an der auch zwei Mitglieder unserer Kommission teilgenommen haben; oder die Einladung des Ausschusses HochschuleWirtschaft der Unternehmerverbände Niedersachsen zu einer Veranstaltung zum Schwerpunkt „Studienabbrüche in MINT-Fächern“, an der Kollege Koepf und ich teilgenommen haben. Auch die cosh-Gruppe aus Baden-Württemberg, die einen Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen für angewandte Wissenschaften in Baden-Württemberg entwickelt hat, kooperiert nun mit unserer Kommission in Fragen zu aktuellen Themen an der Schnittstelle Schule–Hochschule. Zu bestimmten Themen hat die Kommission in der Vergangenheit bereits Experten zu ihren Sitzungen eingeladen, z. B. Miriam Dieter, die zu Studienabbruch und Studienfachwechsel in Mathematik geforscht hat. Aktuelle Themen können über die drei Verbände oder über die Kontaktdaten auf unserer Homepage an die Kommission herangetragen werden.

Zu Beginn ihrer Arbeit in der Kommission standen die neuen Bildungsstandards für die Oberstufe auf dem Plan. Wie hat die Kommission versucht, darauf Einfluss zu nehmen? Was ist daraus geworden?

WK: Als die KMK im Dezember 2011 die geplanten Bildungsstandards der Oberstufe endlich den Verbänden vorstellte, hat die Kommission sehr akzentuiert Änderungen vorgeschlagen. Unser achtseitiges Anschreiben an die KMK vom 2. Januar 2012 ist auf unserer Webseite zu finden. Hier einige Beispiele: Wir hatten uns ein deutlich klareres Bekenntnis zur Nachhaltigkeit des Wissenstransfers von der Sekundarstufe I zum Abitur gewünscht und auch eine klare Benennung der Funktionsklassen, die in der Oberstufe behandelt werden müssen. Wir wollten zudem, dass der Satz

Digitale Mathematik-Werkzeuge ersetzen nicht das händische Rechnen, sondern ergänzen dies in geeigneter Weise.

aufgenommen wird. Es ist hier offenbar dem Veto einzelner Länder geschuldet, dass diese Änderungswünsche nicht aufgenommen wurden. Ein

großer Erfolg war jedoch, dass die drei Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik in jedem Bundesland im Abitur vorkommen müssen! Wenn allerdings ein Schüler Mathematik vor dem Abitur abwählt – und das geht in einigen Bundesländern –, nützt dies nicht viel.

GG: Nachdem die Bildungsstandards seitens der KMK beschlossen waren, ging es in den Ländern um die Umsetzung. Um dies zu unterstützen, hat die Kommission 2013 und 2014 mit den Zuständigen aus Lehrplankommissionen und Landesinstituten zwei große Expertentagungen zur Konkretisierung und Implementation der Abitur-Bildungsstandards durchgeführt.

HJE: Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife sollten die Standards für den Primarbereich und den Mittleren Schulabschluss fortschreiben. Dies wurde bezüglich der Formulierung der Leitideen und Kompetenzen auch realisiert. Die Formulierung von Leitideen als den Mathematikunterricht durchziehende ‚rote Fäden‘ finde ich grundsätzlich richtig. Dies knüpft an dem an, was schon von Whitehead früh thematisiert worden ist und dann von zahlreichen Didaktikern im In- und Ausland weiterentwickelt wurde. Kompetenzorientierung bedeutet für mich, darauf zu schauen, was die Schüler können und gelernt haben und nicht darauf, was laut Klassenbuch unterrichtet worden ist.

Immer wieder wird von Kritikern geäußert, dass die Kompetenzen die Inhalte verdrängt hätten. Doch das ist ein grundlegendes Missverständnis. Bei den Kompetenzen geht es auch um Wissen und Können und es ist völlig klar, dass diese nicht inhaltsfrei vermittelt werden können. Inhalte und prozessbezogene Kompetenzen sind miteinander eng verwoben. Um es mit einem Wort von Heinrich Winter zu sagen: „Es gibt kein Stricken ohne Wolle!“ Natürlich kann man sich bei allen Lehrplänen und Bildungsstandards wünschen, dass mehr Inhalte aufgelistet werden. Im Moment ist die Tendenz vorherrschend, einen ‚Kern‘ zu formulieren und Weiteres den Ländern und Schulen zu überlassen. Ich kann mir durchaus vorstellen, dass bei der nächsten Revision in 10 oder 15 Jahren das pädagogische Pendel wieder etwas anders ausschlägt.

Ein wesentliches Ziel der Bildungsstandards sollte sein, den Ländern einen gemeinsamen Rahmen zu geben, um die vorhandenen Unterschiede zu verringern. Sie sind gewissermaßen die Richtlinien für die Lehrplan-Kommissionen der Länder und auch eine Art Minimalkonsens. Ob dieses Ziel der Vereinheitlichung so erreicht werden

kann, scheint mir sehr ungewiss – vor allem angesichts der sehr unterschiedlichen Entwicklungen insbesondere beim Einsatz digitaler Werkzeuge in der Sek II und im Abitur. Aber das Bildungswesen wird in seiner Flexibilität ja oft mit einem Tanker verglichen, und somit kann es sein, dass Kursänderungen erst in Zukunft greifen werden.

WK: Um das Bild des Tankers aufzunehmen, möchte ich hinzufügen, dass solch ein komplexer Prozess, einen Minimalkonsens zwischen 16 Ländern und vielen weiteren Akteuren auszuloten, natürlich die Notwendigkeit zur Kompromissbereitschaft erfordert; dies betraf auch die Diskussionen innerhalb der Kommission. Kritiker, die alles andere als die Durchsetzung ihrer Maximalforderungen als Verrat an ihren Prinzipien betrachten, sind naturgemäß mit keinem Ergebnis zufrieden, das durch Kompromisse zustande gekommen ist. Meines Erachtens führt solches Verhalten aber geradezu in die politische Bedeutungslosigkeit.

In den letzten Mitteilungen der DMV gab es ‚Zehn unbequeme Fragen zur Kompetenzorientierung‘. Wie ist die Position der Kommission dazu?

HJE: Ich möchte dazu ganz persönlich sagen: Dieser Beitrag ist eher verzerrend als unbequem. Schon zu Beginn wird behauptet, dass Kompetenzorientierung die Mathematik auf einen nützlichen Output reduziere und Verständnis ersetzen würde. Natürlich spielt Anwendungsorientierung eine größere Rolle als vorher. Das halte ich aber auch nicht für schädlich, ich verweise darauf, dass Heinrich Winter drei Grunderfahrungen formuliert hat, und davon ist dies eine. Und die Anwendungsorientierung ist in anderen Ländern viel ausgeprägter als bei uns, was die Autoren Wiechmann und Bandelt ja selbst im Vergleich der deutschen und englischen Wikipedia konstatieren. Weiter wird beklagt, durch die Kompetenzorientierung könne man jetzt mit elementarem Rechnen das Abitur in Mathematik bestehen. Das mag sein, liegt aber sicher nicht an der Kompetenzorientierung. Es ist seit Jahrzehnten so, dass man in Grundkursen oft mit der Kenntnis der Ableitung und Stammfunktion von x^n und dem Lösen quadratischer Gleichungen über die Runden und zu den Minimalpunkten für eine 4 kam. Das kann man beklagen – da bin ich durchaus dabei –, es ist aber wahrlich kein neues Phänomen durch die Kompetenzorientierung.

Zu den Ausführungen über ‚zwei Arten von Mathematik‘ möchte ich nur einen Satz von Wagenschein frei zitieren: „Wer in den Baumwipfeln lebt, sollte nicht über Waldwege reden!“ Und dass die Autoren darüber befremdet sind, dass Mathematik nicht nur Buchwissen sein solle, sondern auch in Alltagssituationen verfügbar und an-

wendbar sein soll, das finde ich wiederum ausgesprochen befremdlich. Dann wird weiter gegen den Kompetenzbegriff polemisiert. Schauen wir doch einmal in die Bildungsstandards. Da geht es exakt um folgende sechs Kompetenzen: mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, mathematisch kommunizieren. Wer will denn ernsthaft dagegen sein?

Danach wird gegen die Outputorientierung zu Felde gezogen. Was heißt das denn wohlverstanden? Dass es am Ende der Schule nicht darum geht, welche Formeln ein Schüler aufsagen kann, sondern dass Wissen und Können zusammenkommen müssen und man dies auch anwenden und in gewissem Rahmen auch messen kann. Das gäbe aber nicht genug für die Polemik her. Stattdessen wird behauptet, dass man Problemlösen auch „auf dem Wege eines verständnislosen Rechnereinsatzes“ erreichen könnte. Insbesondere wird der Outputorientierung vorgeworfen, dass sie eine Messbarkeit mit sich bringe. Nun ja, es wurde doch jahrzehntelang geklagt – aus südlichen Bundesländern wie aus Hochschulkreisen – dass die Abiturleistungen in den Ländern nicht vergleichbar seien! Jetzt wird es halt vergleichende Untersuchungen der Länder-Leistungen auf Basis der Bildungsstandards geben. Ich hätte mir jedenfalls in den DMV-Mitteilungen einen fundierteren, sachlichen und weniger polemischen Beitrag gewünscht.

WK: Auch ich finde, dass die Autoren in keiner Weise überzeugend dargelegt haben, was an den Kompetenzen der Bildungsstandards falsch sein soll. Dass die Standards inhaltlich zu vage gehalten sind, kann man doch nicht den Kompetenzen anlasten.

GG: Sogar die kontinuierlich steigende Abiturientenquote in Deutschland – wobei im internationalen Vergleich Deutschland eher noch zurückliegt – wird häufig der Kompetenzorientierung angelastet. Das ist jedoch eine politische Weichenstellung. Auch die Zeiten, in denen aus der Schule Leistungskurs-Absolventinnen und -Absolventen mit einem zweieinhalbjährigen 6-stündigen Leistungskurs Mathematik an die Hochschulen kamen, sind vorbei. Zudem nimmt der Anteil der Studienanfängerinnen und -anfänger, die nicht auf dem klassischen Weg durchs Gymnasium an die Hochschulen kommen, immer mehr zu. Daran kann man seitens der Schule jedoch nichts ändern und das ist politisch gewollt. Dies hängt aber auch nicht mit der Kompetenzorientierung zusammen. Im Gegenteil ist die Kompetenzorientierung

ein guter Weg, den schlechten PISA-Ergebnissen zu begegnen und die Mathematikleistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Erste Erfolge gibt es bereits.

Sowohl auf der schulischen Seite als auch auf der Hochschuleseite hat sich in den letzten Jahren mit der Umwandlung von G9 auf G8, der deutlichen Erhöhung der Abiturquoten, dem Bologna-Prozess vieles geändert. Politisch ist dies gewollt, Leidtragende sind die Schülerinnen, Schüler und Studierenden, die mit weniger Vorbereitungszeit und Betreuung denselben Anforderungen in der Schule und Hochschule gegenüberstehen. [vgl. Stephanie Schiemann, Die Vergleichbarkeit von Abiturnoten und -quoten. Mitteilungen der DMV 23 (2015), 186–187.] Auch die Lehrkräfte stoßen da teilweise an die Grenzen des Machbaren. Wie steht die Kommission zu dieser immer dünner werdenden Brücke zwischen Schule und Hochschule? Was würden Sie am liebsten ändern, wenn Sie die Möglichkeiten dazu hätten?

WK: Ja, in der Tat haben wir heute sicher eine ganz andere Situation als zu meiner Schulzeit. In meinem Abiturjahr 1972 gingen nur knapp 10% eines Schülerjahrgangs an die Universität, heute sind wir bundesweit bei etwa 50% angekommen. Diese Tatsache muss zu einer größeren Heterogenität führen. Zusätzlich kommt, wie angesprochen, die Umstellung von G9 auf G8 und die Reduzierung der Stundentafeln hinzu. Aber wir müssen auch die Kirche im Dorf lassen: Über die Diskontinuität am Übergang Schule–Hochschule hat bereits Felix Klein vor 100 Jahren ausführlich gesprochen, das zieht sich durch alle Jahrzehnte und ist nichts Neues, siehe z. B. auch die „Denkschrift der DMV“ von 1976. Die Kommission hat sich übrigens auch für die Wiedereinrichtung von Leistungskursen eingesetzt, die in vielen Ländern abgeschafft wurden. Und sie hat sich aktiv an mehreren Tagungen zu Vorkursen und Lehrinnovationen beteiligt, die vom Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) veranstaltet worden sind.

Wenn ich mir etwas wünschen dürfte, würde ich mir für die Schule, vor allem in der Sekundarstufe, wieder deutlich mehr Unterrichtsstunden im Fach Mathematik wünschen. Auch Leistungskurse hätte ich gerne zurück. Bezüglich der Universitätsausbildung hätte ich ebenfalls zwei Wünsche: Für die Teilnahme an Vorkursen müsste es eine Verpflichtung geben. Freiwillige Vorkurse werden häufig von denen besucht, die es gar nicht nötig haben. Und ich würde mir wünschen, dass sich auch gerade Ingenieurfachbereiche mehr darüber Gedanken machen, wie man die Eingangsphase verbessern kann, um die Studienanfängerinnen und Studienanfänger besser mitzunehmen.

Konkret gab es inzwischen schon zwei sehr erfolgreiche Tagungen der Kommission. Worum ging es da? Wer hat teilgenommen? Und welche Ergebnisse hat es gegeben?

GG: Die Kommission hatte ja zum Beispiel kritisiert, dass die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife für eine Implementation in den Ländern nicht konkret genug sind. Wir wollten aber nicht nur kritisieren, sondern den aus unserer Sicht entscheidenden Implementationsprozess in Kernlehrpläne der Länder und Abituraufgaben konstruktiv begleiten. Daher haben wir uns sehr schnell entschlossen, im Oktober 2013 in Münster eine Tagung mit dem Titel „Abiturstandards Mathematik konkret“ für die Experten aus allen Bundesländern anzubieten, die für die Bildungspläne und die Abituraufgaben zuständig sind. Es kamen Kolleginnen und Kollegen, die in den entsprechenden Landesinstituten für Mathematik zuständig sind, in Abituraufgabenkommissionen der Länder arbeiten oder federführend an der Erstellung von Mathematik-Lehrplänen zuständig sind.

Die Initiative der Kommission, ein Forum wie dieses zu gründen, wurde von den 54 anwesenden Experten der Länder sehr begrüßt. Es bestand Einigkeit darüber, dass zur Umsetzung der Bildungsstandards auch umfangreiche Maßnahmen zur Intensivierung bestehender Lehrerfortbildung dringend notwendig sind. Die Planung und Durchführung der Tagung zeigt, dass die Kommission – auch im Namen der drei Verbände DMV, GDM und MNU – aktiv und konstruktiv an der Konkretisierung der Bildungsstandards mitwirken und die Länder bei dieser Arbeit unterstützen und beraten möchte. Insbesondere bei der Entwicklung der Lehrpläne und der Abiturprüfungsaufgaben sahen wir hier gute Einflussmöglichkeiten. Das wichtigste Ergebnis ist sicherlich, dass die Kolleginnen und Kollegen aus den Ländern sich untereinander austauschen konnten und einige Ideen nun gemeinsam weiterverfolgen wollen.

Aufgrund des positiven Feedbacks haben wir entschieden, im Herbst 2014 eine Folgetagung zum Thema „Abiturstandards Mathematik: Bildungspläne und Implementation“ in Paderborn anzubieten. Diese zweite Tagung widmete sich unter anderem den Themen „Basis- und Werkzeugkompetenzen“. In Hauptvorträgen wurde von Andreas Büchter die Frage „Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife: Wer benötigt noch länderreife Lehrpläne?“ diskutiert, und Daniel Grieser stellte Modelle zur Verbesserung der Hochschullehre vor. In zwei Workshops wurde dann intensiv über die Themen Basiskompetenzen bzw. Werkzeugkompetenzen diskutiert.

Offensichtlich muss sich der Übergang zwischen Schule und Hochschule verbessern. Was wird interessierten Abiturienten neben den Vor- und Brückenkursen in der Hochschullandschaft noch angeboten? Wie bringt sich die Kommission hier ein?

WK: Es gibt Kolleginnen und Kollegen, die der Meinung sind, die Schule müsse den Hochschulen Schüler liefern, deren Mathematikkenntnisse generell für jedes MINT-Studium bereits ausreichend sind. Dies ist aber nur ein frommer Wunsch und war auch bei meinem eigenen Abitur vor über 40 Jahren nicht so. Ein allgemeinbildendes Abitur kann in der Regel gar nicht spezifisch auf ein MINT-Studium vorbereiten, es hat ja eine viel breitere Aufgabe. In Kassel, wo ich arbeite, gilt zudem das Hessische Hochschulgesetz, nach welchem die Voraussetzung für jedes Bachelorstudium die Fachhochschulreife ist. Mehr als 50% unserer Ingenieurstudierenden haben nur ein Fachabitur. Daher liegt es auf der Hand, an den Fachhochschulen und Universitäten geeignete Maßnahmen zu ergreifen, um diese Heterogenität zu überwinden. Mathematische Vor- und Brückenkurse sind hier meines Erachtens sehr wichtig und müssen weiterentwickelt werden. Ganz aktuell haben neun technische Hochschulen (TU9) zusammen einen bundesweiten Online-Brückenkurs entwickelt, den Schüler nach ihrer Schulzeit selbst durchführen können. Sie sehen dort durch die eingebauten Tests, ob sie bereits gut auf ein MINT-Studium vorbereitet sind, beziehungsweise wo noch Lücken sind und die Teilnahme an einem Vorkurs empfohlen wird. Mehrere Mitglieder der Kommission sind an diesem Projekt persönlich beteiligt.

GG: Sicherlich müssen die Überlegungen weitergehen und können nicht mit Beginn des Studiums enden. Zu dieser Problematik gibt es bereits Diskussionen, z. B. im Rahmen einer Tagung in Bonn mit dem Titel „Mathematik Lernen an der Schule und im Studium: Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Konsequenzen“, zu der auch die Mitglieder der Kommission eingeladen und durch Vorträge und Diskussionsbeiträge eingebunden waren. Der Mathematikunterricht in den Schulen hat sich – nicht zuletzt auch als Folge des Abschneidens in den großen Vergleichsstudien wie PISA – verändert. Darauf kann man nicht nur mit Vorkursen und Veränderungen zu Studienbeginn reagieren. Wichtig sind auch Ansätze, die nicht nur Förderung des Fachwissens zum Ziel haben, sondern dazu beitragen können, dass sich die Studierenden hinsichtlich der Wahl ihrer Hochschule und des Studiengangs auf der Basis eigener Erfahrungen besser orientieren können. Weitreichende Veränderungen in den Hochschulen sollte man aber nicht ohne Experten auch aus dem Schulbereich

diskutieren. Auch in diesem Themenfeld kann die Kommission zu einem Diskussionsprozess beitragen.

HJE: Die Hochschulen müssen sich darauf einstellen, dass sich die Abiturienten gegenüber den 1980er und 1990er Jahren verändert haben. Diese Veränderung kann man beklagen, sie ist aber da. Das hat zum einen sicher auch Gründe in einer verringerten Mathematik-Stundenzahl (auch durch G8) und in der weitgehenden Abschaffung der Leistungskurse zugunsten von Kursen mit grundlegendem und erhöhtem Niveau. Aber es hat vor allem allgemeine gesellschaftliche Gründe, die Generation von YouTube und Smartphones ist anders geworden, das ist nicht durch die Kompetenzorientierung oder die Schule allgemein gekommen.

GG: Einfache Lösungen gibt es nicht. Die Entwicklung der Oberstufen der Gymnasien verläuft zurzeit in den einzelnen Ländern unterschiedlich. Während in den 1970er Jahren die Idee der Spezialisierung zur Einführung von Leistungs- und Grundkursen mit weitgehenden Wahlmöglichkeiten zu sehr speziellen Fächerkombinationen geführt hat, werden heute diese Wahlmöglichkeiten häufig wieder eingeschränkt, um eine breitere, aber dann auch weniger spezielle Ausbildung aller Schülerinnen und Schüler zu gewährleisten. So gibt es Länder, in denen alle Abiturientinnen und Abiturienten Mathematik auf gleichem Niveau lernen und darin auch geprüft werden, während in anderen Ländern die Wahl zwischen Grund- und Leistungskurs besteht und das Fach Mathematik im Abitur freiwillig ist. Ein von einigen Kolleginnen und Kollegen gefordertes „Zurückdrehen“ der Entwicklung ist aufgrund der Zuständigkeit der Länder und der sehr unterschiedlichen Traditionen nicht realistisch. Dennoch weisen wir auch als Kommission darauf hin, dass die Kürzung von Mathematikunterricht in den Stundentafeln große Probleme an den Hochschulen nach sich zieht.

Im Blickpunkt steht auch immer wieder der Einsatz von GTR, CAS und Computern im Mathematikunterricht der Schulen und bei den Prüfungsaufgaben im Abitur. Trotz der einheitlichen Vorgaben der KMK über die allgemein gültigen Bildungsstandards sind wir von einem einheitlichen Vorgehen in allen Bundesländern weit entfernt. Schwierig wird es dann auch mit dem bundesweiten Zentralabitur. Wie sehen die KMK-Vorgaben aus, und wie setzen die Bundesländer diese um? Was wünschen sich die Hochschulen? Und wie positioniert sich die Kommission dazu?

HJE: Ich möchte speziell zum Einsatz digitaler Werkzeuge etwas sagen, ein Thema, das mich auch persönlich seit Langem beschäftigt. Hier habe ich

sicher auch eine exponiertere Position, die über den Konsens in allen Verbänden hinausgeht. Die Bildungsstandards formulieren zum Einsatz digitaler Werkzeuge: „Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung“. Ich finde es völlig in Ordnung, dass Schüler in Prüfungen auch mit den Werkzeugen arbeiten, die sie jahrelang im Unterricht genutzt haben. Ich finde es aber auch richtig, dass es in Prüfungen sogenannte hilfsmittelfreie Teile gibt. Das ergänzt sich und wird sich hoffentlich in den nächsten Jahren so entwickeln, dass sich anhand der und durch die Aufgaben deutlicher herauskristallisiert, was mit und was ohne Hilfsmittel (neben Formelsammlungen sind damit meist Grafik-Taschenrechner und mathematische Software gemeint) gekonnt werden sollte.

Statt zu versuchen, bestimmte Werkzeuge zu verhindern (damit ist man schon vor Jahrzehnten beim Einsatz des einfachen Taschenrechners gescheitert), sollte man sich damit beschäftigen, wie man mit zeitgemäßen Werkzeugen besser Mathematik lehren und lernen kann. Dynamische Visualisierung ist da ein Stichwort für schüleraktives Lernen. Welche Werkzeuge in Unterricht und Prüfung eingesetzt werden, unterliegt dem Wandel der Zeit. Wer kann heute noch schriftlich Wurzeln ziehen (und wenn – wer macht es?), wer kann noch mit Logarithmentafeln und Rechenschieber arbeiten? Wir leben in einer Zeit, wo PCs bis Smartphones alles gesellschaftlich durchdringen. Das Thema Werkzeugkompetenz war deshalb auch 2014 einer der intensiv diskutierten Schwerpunkte unserer zweiten Expertentagung.

GG: Das bundesweite Zentralabitur wird es ja so nicht oder noch nicht geben. Es wird aber ab 2017 einen Aufgabenpool geben, aus dem alle Länder Aufgaben für die Abiturprüfungen entnehmen können. Dies ist ein wichtiger Schritt, um die Qualität der Prüfungsaufgaben zu verbessern und das Anforderungsniveau in den Ländern schrittweise anzugleichen. Bezogen auf die digitalen Werkzeuge wird der Aufgabenpool neben Aufgaben ohne Hilfsmittel sowohl Aufgaben für den Einsatz von Computeralgebra als auch für den Einsatz einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner vorsehen. Die Länder können hier die entsprechend benötigten Aufgaben auswählen. Der Erfolg dieses Aufgabenpools ist natürlich davon abhängig, dass die Länder auch wirklich Abiturprüfungsaufgaben aus dem Aufgabenpool verwenden. Auch diesen Prozess werden wir in der Kommission aufmerksam und kritisch begleiten. Gerade bei diesem Thema ist es wichtig, dass die Verbände mit einer gemeinsamen Stimme sprechen. Würden die Schul-

vertreter etwas anderes als die Hochschulvertreter sagen, dann könnte es sein, dass die Politik weder die eine noch die andere Seite ernst nimmt.

WK: Der Einsatz digitaler Medien im Schulunterricht wird von manchen Kritikern erstaunlich verbissen zum einfachen Sündenbock für alle Fehlentwicklungen gemacht. Die wahren Ursachen für Mängel in den Mathematikkenntnissen heutiger Schülerinnen und Schüler sind jedoch komplexer und liegen beispielsweise in den bereits aufgezählten Stundenkürzungen, Wechsel zu G8 und der Abschaffung von Leistungskursen. Diese Themen sind aber viel schwieriger zu durchschauen und erst recht anzugehen.

Was steht jetzt auf der Agenda der Kommission?

GG: Aktuell werden wir uns auf unserer nächsten Sitzung die Beispielaufgaben für den Abituraufgabenpool der Länder ansehen und gemeinsam überlegen, ob diese aus Sicht der Verbände die mathematischen Kompetenzen zu Studienbeginn adäquat abbilden. Ein anderes Thema werden die Mindestanforderungen im Fach Mathematik am Ende der Sekundarstufe II sein.

Alle: Die gemeinsame Kommission leistet wichtige bildungspolitische Arbeit unter anderem für den möglichst reibungslosen Übergang von Schulen zu Hochschulen. Dabei sind Kompromisse in alle Richtungen und zwischen allen beteiligten Akteuren notwendig. Der Erfolg unserer Arbeit und die große Sichtbarkeit unserer Kommission in der bundesweiten Bildungslandschaft zeigt jedoch, dass wir auf dem richtigen Weg sind und diesen weitergehen müssen!

Stephanie Schiemann, Netzbüro Schule-Hochschule der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Fachbereich Mathematik und Informatik, FU Berlin, Arnimallee 7, 14195 Berlin
Email: schiemann@math.fu-berlin.de

Zuerst in: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4-2015. Wiederabdruck mit freundlicher Genehmigung.

GDM Summerschool 2015 in Brinkum

Kerstin Hein und Lara Vanflorep

Die diesjährige GDM Summerschool für Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler wurde von der Universität Bremen ausgerichtet und fand vom 14.9. bis 17.9.2015 in Brinkum statt. Die Summerschool stand ganz unter dem Thema ‚Brückenschläge‘, die Möglichkeiten aufzeigen sollten, die Vielfalt der mathematikdidaktischen Forschung und ihre Ansätze, Perspektiven, Theorien, Methodologien, Methoden und Paradigmen zu verbinden.

Getreu der thematischen Ausrichtung leitete Prof. Dr. David Reid (Universität Bremen) die Veranstaltung mit seinem Vortrag „A short history of research in mathematics education, and some imaginary futures“ ein und machte damit die wissenschaftlichen *Brückenschläge* deutlich, die es zu schlagen gilt, wenn die verschiedenen Forschungstraditionen aufeinandertreffen.

Am späten Nachmittag konnten die Teilnehmenden zwischen einem Vortrag von Prof. Dr. Michael Windzio (Universität Bremen) und Prof. Dr. Anne Levin (Universität Bremen) wählen. Michael Windzio gab Einblicke in die Soziologie und Anknüpfungsmöglichkeiten an „soziale Netzwerke“; Anne Levin zeigte auf, wie quantitative Methoden zur Erforschung fachdidaktischer Fragestellungen genutzt werden können.

Am Abend gab es das offene Angebot von Bremer Promovierenden, Einführungen in verschiedene Auswertungsprogramme zu bekommen. So wurden Erfahrungsberichte zu Atlas.ti, Max QDA und Elan vorgestellt mit der anschließenden Option, sich mit den eigenen Daten an ihnen auszuprobieren.

Am Folgetag trug Dr. Nils Buchholtz (Universität Hamburg) zum Methodenmix in der mathematikdidaktischen Forschung vor und stellte zur Diskussion, welche Chancen und Grenzen existieren, wenn man die intensivste Form der Brückenschläge zwischen quantitativer und qualitativer Forschung betreibt. Prof. Dr. Michèle Artigue (Universität Paris) gab einen sehr umfassenden Einblick in die französische Forschung und stellte die Idee, Prinzipien und Hintergründe des „Didactical Engineering“ vor. Parallel trug Prof. Dr. Anke Lindmeier (Universität Kiel) zum Thema Testkonstruktion und Itementwicklung vor und veranschaulichte ihre Präsentation am Beispiel von Wissens- und Kompetenztests.

Am Dienstagabend und dem folgenden Nachmittag begann der für die Promovierende vielleicht aufregendste Teil der Summerschool: Sie erhielten die Möglichkeit, ihr eigenes Forschungsprojekt einem ihnen zugeteilten Expertinnen und



Expert(inn)en und Teilnehmer(inn)en der GDM Summerschool (Foto: Privat)

Experten vorzustellen und vorbereitete Fragen mit diesem zu diskutieren. Diese Gelegenheit wurde von den Teilnehmenden als sehr gewinnbringend erachtet und den Expertinnen und Experten sei an dieser Stelle für ihre individuellen Beratungen gedankt!

Der Mittwoch wurde mit einem Vortrag von Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs (Universität Bremen) über die Theorien in der Mathematikdidaktik eingeleitet, bei dem deutlich wurde, wie auf Basis theoretischer Grundlagen mathematikdidaktische Forschung geschieht und geschehen kann. Anschließend konnte im Vortrag von Prof. Dr. Christine Knipping (Universität Bremen) über soziologische Theorieansätze in der Mathematikdidaktik ein Überblick über unterschiedliche soziale Einflüsse auf das Mathematiklernen erworben werden, während Prof. Dr. Dagmar Bönig (Universität Bremen) und Prof. Anna Susanne Steinweg (Universität Bamberg) einen Einblick in die Herausforderungen und Chancen der Methodologie bei Untersuchungen mit Kindern aus dem Elementar- und Primarbereich gaben.

Am Mittwochnachmittag bekamen einzelne Doktorandinnen und Doktoranden die Möglichkeit, ihre Promotionsprojekte durch Vorträge zu präsentieren, deren Diskussion über die Ideen und Herausforderungen der einzelnen Projekte beim gemeinsamen Abendessen mit den Expertinnen und Expertinnen ausgeweitet werden konnte.

Am letzten Tag im Workshop von Prof. Dr. Maike Vollstedt (Universität Bremen) wurde nicht nur präsentiert, wie mit Hilfe der Grounded Theory Theorien auf Grundlage von Interviewdaten ent-

wickelt werden können, sondern die Teilnehmenden bekamen die Gelegenheit, einmal selbst auf Grundlage von original Interviewmaterial Kategorien zu entwickeln. Währenddessen stellten Prof. Dr. Dominik Leiss (Universität Lüneburg) zusammen mit Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow (Universität Münster) ihre qualitativen Gedanken zu quantitativen Forschungsmethoden vor.

Schließlich bekamen die Teilnehmenden die Möglichkeit nicht nur die Summerschool als Ganzes zu reflektieren, sondern über ihren eigenen Erkenntnisgewinn nachzudenken [2500?] insbesondere in Bezug auf das eigene Forschungsprojekt.

Mit der diesjährigen Summerschool gelang es somit nicht nur, eine Brücke zwischen den unterschiedlichen Forschungsmethoden der mathematikdidaktischen Forschung zu schlagen. Es wurden sowohl Brücken geschlagen von den Theorien zu den eigenen Dissertationsprojekten als auch zwischen den Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern sowie zu den anwesenden Expertinnen und Experten.

Da die diesjährige Summerschool also für alle Beteiligten ein großer Gewinn war, möchten wir abschließend das Organisationsteam loben.

Kerstin Hein, Technische Universität Dortmund, Lehrstuhl für IEEM, Vogelpothsweg 87 44227 Dortmund, Email: kerstin.hein@mathematik.tu-dortmund.de

Lara Vanflorep, Universität Paderborn, Institut für Mathematik, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Email: larav@math.upb.de

Bericht zum Herbsttreffen der Nachwuchsvertretung

Sebastian Schorcht, Raja Herold, Ulrike Siebert und Stefanie Rach für die GDM-Nachwuchsvertretung

Die Nachwuchsvertretung der GDM hat mittlerweile zahlreiche Aufgabengebiete, die jährlich bei einem Herbsttreffen besprochen, diskutiert und auf die Mitglieder der Nachwuchsvertretung verteilt werden. Dieses Jahr fand das Treffen an der Universität Duisburg-Essen in Essen statt. Für die Nachwuchsvertretung gestaltet sich diese Zusammenkunft jedes Jahr als sehr produktiv und erlaubt

einen offenen Raum zu diversen Diskussionen, die so die Meinungsbildung zu verschiedenen Angeboten anregen.

An dieser Stelle wollen wir uns bei den Mitgliedern der GDM bedanken, dass sie uns dieses Treffen mithilfe eines finanziellen Zuschusses für die Reisekosten ermöglichen, wobei wir versuchen, diese so gering wie möglich zu halten. Im

Beitrag möchten wir über Diskussionspunkte und Teilergebnisse des diesjährigen Herbsttreffens berichten, um eine transparente Einsicht in unsere Arbeit zu ermöglichen.

Arbeitsgrundsätze

Aufgrund des Übergangs von bald ausscheidenden Mitgliedern zu neu aufgenommenen Mitgliedern innerhalb der Nachwuchsvertretung kam es im letzten Jahr zu einem Anstieg der Mitgliederzahl. Um die sich engagierenden Personen zu organisieren, hat sich die Nachwuchsvertretung dazu entschlossen, Aufgabenbereiche in Arbeitsgruppen abzubilden. Um die Kommunikation innerhalb der Nachwuchsvertretung möglichst effizient zu gestalten, wurde jeder Arbeitsgruppe ein Ansprechpartner zugeordnet. Unter anderem gehört zu den Aufgabenbereichen

- Internationales Engagement (bspw. die Kooperation mit dem Organisationsteam ICME-13 oder der Austausch auf europäischer Ebene mit der YERME),
- Organisation von Angeboten zur GDM-Jahrestagung (bspw. Nachwuchstag, Talkrunde, Postdoc-Workshop, Expertensprechstunde, Nachwuchsforum),
- Internetpräsenz (bspw. Ausbau der Madipedia, Homepage),
- Evaluation von Nachwuchsangeboten,
- Mitarbeit im Beirat,
- Beratende Tätigkeiten (bspw. mit den Organisatoren der Summerschool und dem Doktorandenkolloquium),
- Informationsweitergabe über den Nachwuchsverteiler und die Mitteilungen.

Eventuelle Aufgaben, die aus der Community an uns herangetragen werden, verteilt unsere Sprecherin, Stefanie Rach, an die Ansprechpartner*innen der Arbeitsgruppen. Die interne Struktur wird demnächst übersichtlich dargestellt auf der Madipedia-Seite der GDM-Nachwuchsvertretung erscheinen.

Berichte vom Beirat

Stefanie Rach (Sprecherin) und Alexander Schüler-Meyer (Mitglied der Nachwuchsvertretung) sind derzeit auch Mitglieder im Beirat der GDM, in dessen Sitzungen regelmäßig auch Themen besprochen werden, die die Gruppe der Nachwuchswissenschaftler*innen betreffen. Beispielsweise wurde die Nachwuchsvertretung im letzten Jahr mit der Evaluation des Predoc-Tages (auf der kommenden GDM-Tagung WIP-Tag genannt) beauftragt. Die Ergebnisse dazu wurden von uns in einem Bericht

zusammengefasst, dem Beirat zur Verfügung gestellt und eine Kurzfassung in den letzten Mitteilungen veröffentlicht.

GDM-Jahrestagung 2016

Einen großen Teil des Herbsttreffens der Nachwuchsvertretung nimmt die Organisation der Angebote während der GDM-Jahrestagung ein. Seit mehreren Jahren werden diese Angebote mit besonders großem Zuspruch von den Nachwuchswissenschaftler*innen wahrgenommen. So sind Anmeldezahlen von um die 70 Personen für die der Tagung vorgelagerten Nachwuchstage (6.3.–7.3.2016) durchaus üblich. Während der Nachwuchstage können mehrere Angebote wahrgenommen werden, z.B. Workshops zu Arbeits- und Zeitmanagement, Wissensmanagement, wissenschaftliches Schreiben oder Vorträge halten. Zudem erhalten die Nachwuchswissenschaftler*innen die Möglichkeit ihren GDM-Vortrag vorab in einem geschützten Raum zu präsentieren und konstruktive Rückmeldung zu erhalten (sogenannte Probevorträge). Zum Abschluss der Nachwuchstage können Fragen zur Planung des eigenen Lebensweges mit Wissenschaftler*innen in der Talkrunde besprochen werden. Im letzten Jahr konnte die Nachwuchsvertretung dafür Prof. Dr. Benjamin Rott und Dr. Henrike Allmendinger gewinnen. Während der Tagung bietet die Nachwuchsvertretung Expertinnen- und Expertensprechstunden, einen Post-Doc-Workshop und den Kneipenabend an. Zudem gibt es immer ein Nachwuchsforum, das zum Austausch der Nachwuchswissenschaftler*innen untereinander einlädt. Auch informiert die Nachwuchsvertretung in diesem Forum über ihre Arbeit und wirbt ggf. neue Mitglieder an.

ICME-13 in Hamburg

Die Organisatoren für das Nachwuchsprogramm der ICME-13 in Hamburg, sowie unsere Vertreterin für die Zusammenarbeit mit der YERME, Susanne Schnell, sind an die Nachwuchsvertretung herantreten, um ein gemeinsames Programm zu gestalten. Die (deutschsprachige) Nachwuchsvertretung der GDM wird dazu voraussichtlich zwei Workshops anbieten und bei der Gestaltung eines Nachwuchstreffpunkts mitwirken können.

Doktorandenkolloquium und Summerschool

Ein weiterer umfangreicher Diskussionspunkt beim diesjährigen Herbsttreffen betraf die aktuelle Gestaltung und Positionierung der Doktorandenkolloquien und Summerschools. Für eine Standortbestimmung wurden Profile entwickelt, die die

Charakteristika (Zielgruppe, Inhalte etc.) der beiden Formate gegenüberstellt.

Für die Summerschool konnte folgendes festgehalten werden.

Ziele der Summerschool

- Überblick über und Vertiefung aktueller Themen und Methoden,
- Erweiterung des persönlichen Forschungshorizontes.

Inhalte der Summerschool

- Workshops zu verschiedenen qualitativen und quantitativen Methoden und Inhalten,
- Grundlagen und Vertiefungen u. a. zu Themen wie empirische Bildungsforschung, Stoffdidaktik, fachdidaktische Entwicklungsforschung, hermeneutische Methoden, Grounded Theory, interpretative Unterrichtsforschung.

Zielgruppe

- Empfohlen vor allem für Promovierende im ersten oder zweiten Jahr,
- Forschungsvorhaben sollte erste Konturen haben,
- Gegebenenfalls Postdocs in einem neuen Projekt.

Für das Doktorandenkolloquium wurden folgende Punkte notiert.

Ziele des Doktorandenkolloquiums

- Weiterentwicklung der eigenen Forschung,
- Konstruktives Feedback zur eigenen Forschung von Expert*innen und anderen Promovierenden in einem geschützten Rahmen.

Inhalte

- Arbeitsgruppen in vertraulichem Rahmen zu konkreten Aspekten oder Fragestellungen des eigenen Projektes,
- Projektvorstellungen, Diskussionsrunden und Impulsvorträge.

Zielgruppe

- Empfohlen für Promovierende (ggf. Postdocs),
- deren Forschung bereits ein klares Profil hat (theoretische und ggf. empirische Vorarbeiten, evtl. erste Ergebnisse etc.);
 - die Feedback noch konstruktiv verarbeiten können (d.h. nicht schon in der Phase des Aufschreibens sind).

Auf Basis dieser Zusammenstellung versucht die Nachwuchsvertretung die beiden Formate weiter zu entwickeln, um sie für alle Nachwuchswissenschaftler*innen gewissermaßen zu erhalten. Dabei wurden auch kreative Vorschläge diskutiert und gesammelt, die nach dem Herbsttreffen weiter ausgearbeitet werden.

Insgesamt kann das Herbsttreffen der Nachwuchsvertretung als wichtige Säule im Programmjahr erfasst werden, auf dem jeweils der Ist-Stand berichtet und die vorhandenen Angebote diskutiert und geplant werden.

http://madipedia.de/wiki/Nachwuchsvertretung_der_GDM

Arbeitskreis Frauen und Mathematik

Würzburg, 16.–17. 10. 2015

Renate Motzer

Die 26. Herbsttagung des Arbeitskreises „Frauen und Mathematik“ der GDM fand vom 16.–17. Oktober 2015 in Würzburg statt. Die Tagung war dieses Jahr verknüpft mit der mathematik-historischen Tagung „MathematikGeschichten“, die vom 15.–16. Oktober veranstaltet wurde und in diesem Jahr Frauen in der Geschichte der Mathematik als Themenschwerpunkt hatte.

Einige Arbeitskreismitglieder konnten vom 15.–17. 10. da sein und somit beide Tagungsteile miterleben. Ebenso wurden die Veranstaltungen der Arbeitskreistagung dieses Jahr auch von Frauen besucht, deren Hauptinteresse in der Geschichte der Mathematik liegt.

Die Doppeltagung wurde von Nicola Oswald organisiert. Frau Oswald hat seit Mai 2015 eine Post-Doc Stelle bei Prof. Dr. Klaus Volkert in der Arbeitsgruppe Geschichte und Didaktik der Mathematik, Universität Wuppertal, Fachbereich Mathematik und Informatik inne. Zuvor war sie an der Uni Würzburg tätig und promoviert im November 2014 in Zahlentheorie bei Prof. Dr. Jörn Steuding. Am Freitag Nachmittag waren rund 30 Frauen und Männer anwesend.

Die Doppeltagung begann am Do um 9:30 mit einem Impulsvortrag von Nicola Oswald mit dem Titel „Spurensuche: Von falschen Dokumenten und einzigartigen Funden“. Renate Tobies von Universität Jena schloss an mit einem Vortrag über Iris Runge („Iris Runge bei Osram und Telefonen: ‚Morgen möchte ich wieder 100 herrliche Sachen ausrechnen‘“). Der dritte Vortrag am Donnerstag Vormittag beschäftigte sich mit „Mathematikerinnen im ersten Teil des 20. Jahrhunderts: einige Bemerkungen zum internationalen Vergleich“, vortragen von Catherine Goldstein vom Institut de mathematiques de Jussieu in Paris.

Nach dem Mittagessen fuhr Annette Vogt vom Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte Berlin fort mit dem Titel „Emma S. und Wladimir S. Woytinsky - ein vergessenes Forscher-Ehepaar in der Statistik“. Den letzten Vortrag am Donnerstag hielt Elisabeth Mühlhausen vom Felix Klein Gymnasium Göttingen. Ihr Titel war „TOGETHER - das Mathematikerpaar Grace Emily Chisholm Young und Henry William Young“.

Das offizielle Programm am Donnerstag wurde von einer Stadtführung zum Thema „Frauen in Würzburg“ abgeschlossen.

Der Freitagvormittag wurde von den beiden Vorträgen „Vom Erinnern und Vergessen. Über den Bekanntheitsgrad Sofja Kowalewskajas im Vergleich mit Zeitgenossinnen“ von Eva Kaufholz-Soldat von der Universität Mainz und vom Vortrag „Auch die Tochter ihrer Mutter - Emmy Noethers sozial-politisches Engagement“ von Cordula Tollmien geprägt.

Ab dem Nachmittag spielten dann Mädchen und Jungen im Mathematikunterricht eine Rolle.

Zuerst referierte Hanna Gaspard von der Universität Tübingen über „Geschlechtsunterschiede in den Wertüberzeugungen für Mathematik und Interventionsansätze zur gezielten Förderung“. Hanna Gaspard ist wissenschaftliche Mitarbeiterin am Hector-Institut für Empirische Bildungsforschung. Sie promovierte im Juli dieses Jahres in der Psychologie an der Universität Tübingen mit dem Thema „Promoting Value Beliefs in Mathematics: A Multidimensional Perspective and the Role of Gender“.

„Mädchen sehen den Nutzen von Mathematik vor allem für die Schule selbst, aber nicht für das weitere Leben“, ist ein Ergebnis ihrer Studie. Hanna Gaspard kommt daher zu dem Schluss, dass Mädchen besonders von Maßnahmen profitieren können, die den langfristigen Nutzen von Mathematik deutlich machen. In ihrem Vortrag stellt sie einen möglichen Interventionsansatz vor.

Ab 15:30 stellte Ralf Heinrich Benölken von der Universität Münster (zur Zeit auch tätig an der Uni Kassel) seine Erfahrungen mit Mädchen in Kursen für Mathematikbegabte vor. Unter dem Titel „Vorher dachte ich irgendwie: Nee, das wird jetzt nichts‘ – Zur Bedeutung motivationaler Konstrukte für die Identifikation und die Entwicklung mathematischer Begabungen bei Mädchen“ zeigt er Ergebnisse seiner Untersuchungen zu den Entwicklungen von Interesse und Motivation von mathematische begabten Kindern dar. In Programmen zur Förderung mathematisch begabter Kinder nehmen in Deutschland (im Gegensatz zu anderen Ländern) in der Regel deutlich weniger Mädchen als Jungen teil. Die Erklärungsansätze für dieses Phänomen sind vielfältig und berühren unter anderem Fragen der „Motivation“. Im Vortrag wurden zunächst Ergebnisse von Studien zur Bedeutung ausgewählter motivationaler Komponenten als Bedingungsfaktoren für die Identifikation und

für die Entwicklung von Begabungen bei Mädchen und Jungen präsentiert. Die Indizien deuten darauf hin, dass dem Bereich „Motivation“ im Kontext von Geschlecht und Mathematik unabhängig von dem Begabungszugang große Bedeutung zukommt. Hiervon ausgehend wurde ein weiteres Augenmerk daher auf Konsequenzen und Ansätzen gelegt, die Aspekte aufzeigen, um Mädchen die Mathematik näherzubringen. Unter anderem wurden in diesem Kontext einige erste Ergebnissimplosionen einer laufenden Studie zu Wünschen von Mädchen und Jungen gegenüber der Gestaltung des Mathematikunterrichts präsentiert.

Nach einer kurzen Kaffeepause schloss Christine Ott vom Lehrstuhl für Didaktik der deutschen Sprache und Literatur von der Universität Würzburg an mit einem Vortrag über den „Geschlechterdiskurs im und ums Mathematikbuch“. Frau Ott konnte bei ihrer Untersuchung von Deutsch- und Mathematikbüchern feststellen, dass Schulbücher über die letzten Jahrzehnte häufiger Ausdrücke wählen, die Personen nicht mehr nur als Typen erscheinen lassen, sondern zunehmend von Individuen sprechen. Auch wenn Frauen und Männer, Mädchen und Jungen in den Büchern oft gleich häufig dargestellt werden, bleiben Besitz und Berufstätigkeiten meist mit Männern verbunden. Keine eindeutige Antwort geben Schulbuchzulassungsstellen, SchulbuchautorInnen oder SchulbuchredakteurInnen auf die Frage, ob in Büchern, z.B. in mathematischen Sachaufgaben, Geschlechterstereotype gelegentlich bewusst angesprochen werden sollen, um sie anschließend zu dekonstruieren, oder Aufgaben mit derartigen Inhaltsbereichen gar nicht auftauchen dürfen. Genauso offener Diskussionspunkt ist, ob beispielsweise geschlechtstypische Freizeithemen (Reitsport als ‚Mädchensport‘) als motivierende Rahmensituationen in Aufgabenstellungen gewählt werden sollen oder dürfen. Letztlich hängt damit auch die Frage zusammen, ob man von einer Gleichheit der Geschlechter ausgehen will oder von einer Gleichwertigkeit bei Andersartigkeit.

Am Samstagvormittag hörten wir einen Vortrag von Anna Kristina Binder von der Universität Erfurt, die derzeit auch an der Universität Bremen mitarbeitet. Sie stellte ihr Dissertationsprojekt zum Raumvorstellungsvermögen von Grundschulkindern vor. Geschlechterunterschiede stehen nicht im Fokus der Untersuchung. Das Vorurteil, es gäbe welche in diesem Bereich, kann aber mit untersucht werden. Bisherige Auswertungen zeigen noch keine offensichtlichen Geschlechterunterschiede.

Der zweite Teil des Vormittags war der Sitzung des Arbeitskreises gewidmet. Es wurde beschlossen, dass aus den Tagungsbeiträgen ein neues Heft

in der Reihe „Gender und Mathematik“ erstellt werden soll. Nicola Oswald wird (mit Unterstützung von Renate Motzer und Renate Tobies) den Band herausgeben. Silke Fleckenstein von der Uni Potsdam bot an, die aktuelle AK-Seite in Madi-pedia zu überarbeiten und auch den Arbeitskreismitgliedern beim Einrichten einer eigenen Madi-pediaseite zu helfen (dieses Angebot gilt auch für Arbeitskreismitglieder, die dieses Jahr leider nicht zur Tagung kommen konnten!).

Die nächste Herbsttagung wird vom 28.–29. 10. in Frankfurt stattfinden. Sie wird von Rose Vogel ausgerichtet. Dort soll auch die Diskussion um eine eventuelle Umbenennung des Arbeitskreises fortgeführt werden. Vor allem „Gender und Mathematik“ steht zur Diskussion. Kerstin Kuhn und Silke Fleckenstein wollen die Struktur und Funktion so wie die Arbeitsschwerpunkte des Arbeitskreises beschreiben. Diskutiert wird diese auf der GDM-Tagung und der Herbsttagung 2016. Auf der Basis der neuen Beschreibung des Arbeitskreises soll ein neuer Arbeitskreistitel gefunden werden.

Auch auf der nächsten GDM-Tagung in Heidelberg wird es ein Treffen des Arbeitskreises geben.

Am Samstagmittag wurden noch zwei Themen vorgestellt. Zuerst berichtete Silke Fleckenstein von ihrem Dissertationsprojekt, das an der Uni Potsdam entsteht, „Geschlechtersensibler Mathematikunterricht zum Umgang mit Heterogenität in der Sekundarstufe I“. In monoedukativen Unterrichtsgruppen werden die unterschiedlichen Bedürfnisse und Wünsche von Jungen und Mädchen der siebten Jahrgangsstufe untersucht. Daraus sollen Schlüsse gezogen werden, wie auch in koedukativen Klassen mit den Wünschen und Bedürfnissen der beiden Geschlechter umgegangen werden kann. Näheres zum Promotionsprojekt von Silke Fleckenstein kann auf <http://tinyurl.com/zlgrvzz> nachgelesen werden.

Im letzten Vortrag „Gender- und diversitätssensible Lehramtsausbildung – ein Seminarekonzept für Lehramtsstudierende im Fach Mathematik“ berichtete Rose Vogel aus Frankfurt von einem dort installierten Seminar für Grundschulstudierende, in dem sie Mathematik von einer anderen, kreativen Seite beleuchten können und dadurch häufig einen ganz neuen Zugang zu diesem Fach finden, das für viele aufgrund von schlechten Schulerfahrungen nicht besonders positiv besetzt ist.

Wir danken Nicola Oswald für die gelungene Organisation der Tagung.

Renate Motzer, Universität Augsburg, Universitätsstraße 10, 86135 Augsburg
Email: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Arbeitskreis Grundschule

Tabarz, 6.–8. 11. 2015

Claudia Lack

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule fand auch in diesem Jahr traditionell am ersten Novemberwochenende vom 06. bis 8. 11. 2015 statt. Sie stand unter dem Thema „Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter“. Wie gewohnt trafen sich die etwa 120 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus verschiedenen Bereichen der Lehreraus- und -weiterbildung in Tabarz im Thüringer Wald. Die Hauptvortragenden waren Marei Fetzer (Frankfurt), Charlotte Rechtsteiner-Merz (Weingarten), Meike Grüßing (Vechta) sowie Michael Gaidoschik (Klagenfurt). Ergänzt wurden die Hauptvorträge durch Beiträge in den verschiedenen thematischen Arbeitsgruppen.

Nach der Begrüßung eröffnete Marei Fetzer am Freitagabend die Tagung mit dem ersten Hauptvortrag. Sie befasste sich mit dem Thema „Argumentieren – Prozesse verstehen und Fähigkeiten fördern“. Dabei fokussierte sie die Kompetenz des Argumentierens, die – wie alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen – in der Grundschule von Beginn an aufgebaut und gefördert werden soll. Zunächst stellte sie dar, wie Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule argumentieren. Auf dieser Basis gab sie daran anschließend Anregungen, wie sich die Kompetenzentwicklung beim Argumentieren gezielt anstoßen lässt.

Charlotte Rechtsteiner-Merz widmete sich in ihrem Vortrag „Rechnen entwickeln – Flexibilität fördern“ zwei zentralen Zielen des Mathematikunterrichts in der Grundschule: der Ablösung vom zählenden Rechnen und der Entwicklung flexibler Rechenstrategien. Nach einem Überblick über die aktuellen Forschungsergebnisse auf diesem Gebiet stellte sie Ansätze vor, die die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen positiv beeinflussen können. Als zentrale Aufgabe in diesem Kontext wurde die Schulung des Zahlenblicks benannt. Auch bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern scheint dies von großer Bedeutung zu sein, um eine Ablösung vom zählenden Rechnen zu erreichen.

Die räumlichen Fähigkeiten von Grundschulkindern standen im Zentrum des Vortrags von Meike Grüßing mit dem Titel „Ich denk mich da immer so rein und dann sehe ich das so“. Räumliche Fähigkeiten bzw. Raumvorstellung wird oft im Zusammenhang mit Mathematiklernen und der

Mathematikleistung gesehen. Dabei wird angenommen, dass räumliche Fähigkeiten eine Grundlage für die mentale Repräsentation von mathematischen Konzepten sowie für das mentale visuelle Operieren darstellt. Im Vortrag wurden zentrale Forschungsperspektiven und ihre Befunde skizziert. Dabei waren diese Fragen leitend: Wie lassen sich vorliegende psychologische Modelle mit verschiedenen Subdimensionen für die Beschreibung räumlicher Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter nutzen? Welche Aufgabenmerkmale lassen sich unterscheiden? Wie können räumliche Fähigkeiten gemessen werden? Welche Strategien nutzen Kinder bei der Bearbeitung von Aufgaben mit räumlichen Anforderungen? Abschließend stellte Meike Grüßing Befunde zum Zusammenhang von räumlichen Fähigkeiten und mathematischen Kompetenzen vor und diskutierte sie in Hinblick auf mögliche Implikationen.

In seinem Vortrag zum Thema „Vermeidbare und unvermeidbare Hürden beim Erlernen des Rechnens bis 100“ formulierte Michael Gaidoschik drei Hürden, die beim Verständnis des Stellenwertsystems von den Lernenden überwunden werden müssen: das Verständnis des Bündelungsprinzips, des Positionsprinzips und der Zahlensprechweise. Darauf aufbauend stellte er Gestaltungsmöglichkeiten für den Unterricht vor, die dazu beitragen sollen, dass diese Hürden keine unüberwindbaren Hindernisse und Fallstricke für Kinder werden. Anhand von Beispielen aus Lehrwerken verdeutlichte er Gefahren und regte dann eine Diskussion über fachdidaktische Konzepte bzw. Umsetzungen an.

Während der Tagung wurden zudem die folgenden acht Arbeitsgruppen angeboten. Hier konnte zu verschiedenen Bereichen gearbeitet werden, wobei vor allem laufende Forschungsprojekte vorgestellt und diskutiert wurden:

- Arithmetik (Koordination: Elisabeth Rathgeb-Schnierer)
- Kommunikation und Kooperation (Koordination: Birgit Brandt, Marcus Nührenböcker)
- Sachrechnen (Koordination: Dagmar Bönig, vertreten durch Silke Ruwisch)
- Geometrie (Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer, Simone Reinhold)
- Lehrerfortbildung (Koordination: Marianne Grassmann, Christoph Selter)

- Vorschulische Bildung (Koordination: Meike Grüßing)
- Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit (Koordination: Bernd Neubert)
- Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien in der Primarstufe (Koordination: Silke Ladel, Christof Schreiber)

Auch zu dieser Herbsttagung erscheint wieder ein Tagungsband. Dieser enthält ausführliche Beiträge, die sich auf die Hauptvorträge der Tagung beziehen und dokumentiert zudem Ergebnisse aus den Arbeitsgruppen.

Der von Anna Susanne Steinweg herausgegebene Tagungsband ist in der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ der UBP (Universität Bamberg Press) unter dem Titel der Tagung erschienen. Über OPUS (<https://opus4.kobv.de/opus4-bamberg/frontdoor/index/index/docId/45509>) besteht Zugang zur elektronischen Version des Tagungsbandes.

Die nächste Herbsttagung des Arbeitskrei-

ses Grundschule wird nach vielen Jahren erstmals nicht in Tabarz stattfinden. In Bad Salzdetfurth konnte ein Tagungshotel gefunden werden, welches den großen Teilnehmerkreis ohne Beschränkung aufnehmen kann. Die Tagung widmet sich dem Thema „Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten“ und wird vom 11.–13. 11. 2016 stattfinden. In den Arbeitsgruppen dieser Tagung sollen wieder Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler die Gelegenheit bekommen, ihre laufenden Projekte vorzustellen. Der Arbeitskreis freut sich auf eine interessante Tagung an neuem Ort mit vergrößertem Kreis an Teilnehmerinnen und Teilnehmern.

Weitere Informationen und Anregungen finden Sie auf der Internetseite des AK Grundschule unter <http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/>.

Claudia Lack, Universität Paderborn, Institut für Mathematik EIM, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Email: cl.lack@web.de

Arbeitskreis Interpretative Forschung

Halle, 9.–11. 11. 2015

Birgit Brandt und Frank Förster

Die diesjährige 2. Herbsttagung des Arbeitskreises *Interpretative Forschung* fand vom 9.–11. November 2015 an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg statt.

Das Tagungsprogramm war wie immer von Interpretationssitzungen geprägt, in der Teilnehmerinnen und Teilnehmer Materialien aus laufenden Projekten vorstellten (siehe unten) und durch die fremden Blicke auf das eigene Material neue Impulse für die eigene Forschung erhalten konnten. Um der Arbeitsweise der Interpretativen Forschung Rechnung zu tragen, war für jede Sitzung mindestens zwei Zeitstunden vorgesehen. So stand ausreichend Zeit zur Verfügung, um auch methodische Diskussionen zu den einzelnen Projekten durchzuführen. Auf der Herbsttagung 2014 wurde beschlossen, über diese traditionelle Arbeitsform hinaus durch Gastbeiträge neue Impulse zu setzen und die methodische Diskussion über die Einzelprojekte hinaus anzuregen. Dieses Jahr war daher erstmals ein Gastbeitrag im Tagungsprogramm in-

tegriert. Prof. Dr. Georg Breidenstein (MLU Halle Wittenberg, Arbeitsbereich Grundschulpädagogik und fachübergreifende Grundschuldidaktik) hat das unter seiner Leitung stehende DFG-Projekt „Individualisierung und Kontrolle. Eine praxiologische Untersuchung zum geöffneten Unterricht in der Grundschule“ vorgestellt. Das Forschungsvorhaben zielt auf die Praxis „geöffneten“ Unterrichts und wird in drei Grundschulen mit unterschiedlichen (reform-)pädagogischen Ansätzen durchgeführt. Methodisch kommen in diesem dem ethnographischen Forschungsansatz zuzuordnenden Projekt die teilnehmende Beobachtung und sequenzanalytische Rekonstruktionen zum Einsatz. An konkreten Materialien zu Unterrichtssequenzen mit mathematischen Aktivitäten konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer Einblicke in das Projekt und die Forschungsmethode gewinnen.

In den acht Interpretationssitzungen wurden folgende Themen behandelt:

- Birgit Brandt und Teresa Beck (TU Chemnitz) stellten zwei Ausschnitte eines Transkripts aus dem Projekt erStMaL vor. Der Fokus der Re-Analyse lag auf der *Etablierung einer Lernkultur* in einem vorschulischen Mathematikprojekt mit Kindergartenkindern. In der betrachteten Situation entstanden beim Umschütten mit Wasser freie Momente des Experimentierens. Es wurden sowohl Sprechakte als auch Gesten als Handlungsakte analysiert. Durch den fokussierten Blick wurde ein neuer Schwerpunkt entwickelt, der sich mit den entstandenen Diskrepanzen zwischen einem experimentell-freien Charakter der Situation und den konkret-expliziten Aufgabenstellungen der Erzieherin befasste.
- Frank Förster (TU Braunschweig) stellte ein Transkript aus dem Projekt ViStAD (Video-Studie Analoges Denken) vor, welches zurzeit in Kooperation mit der Martin-Luther-Universität-Halle-Wittenberg durchgeführt wird. Hierbei handelt es sich um einen Auszug, welcher sich mit dem Begabungsmerkmal *Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern* befasst. Der Fokus lag dabei auf den Bedingungen, welche zum Erkennen der Analogien führen oder diese verhindern.
- Rebecca Klose (Justus-Liebig-Universität Gießen) brachte ein Transkript aus ihrem Dissertationsprojekt zur *Untersuchung mathematischer Begriffsbildungsprozesse von bilingual unterrichteten Grundschulkindern (Deutsch/Englisch)* mit. In dem Transkript äußern sich zwei mehrsprachige Schüler_innen spontan zu einem bereits im Unterricht behandelten Thema. Sie vergleichen in der Sequenz den Würfel mit anderen geometrischen Körpern. Von besonderem Interesse war, welche sprachlichen Mittel die Schüler_innen in ihren Beschreibungen nutzen und auf welche Konzepte ihre Äußerungen hindeuten. Des Weiteren wurde analysiert, inwieweit die Schüler_innen mathematische Fachbegriffe sachgerecht nutzen.
- Stefanie Müller-Heise (MLU Halle-Wittenberg) stellte ihr Promotionsprojekt zur Reflexion über mathematische Problemlöseprozesse vor. In ihrer Studie lösen Kinder im Grundschulalter zunächst eigenständig Problemaufgaben. Anschließend werden sie mit videografierten Bearbeitungsprozessen anderer Kinder zur selben Aufgabe konfrontiert. Fokus der Analyse ist, inwieweit die Kinder durch die Betrachtung fremder Bearbeitungsprozesse angeregt werden, den eigenen Lösungsprozess damit in Beziehung zu setzen und verschiedene Aspekte der Reflexion aufzudecken.
- Marcus Schütte und Judith Jung (TU Dresden) stellten zwei Transkripte einer *Pilotierung zum in-*

klusiven Mathematiklernen in der Grundschule vor. Der Schwerpunkt der Analysen lag auf der Rekonstruktion der sprachlichen Gestaltung der Lernprozesse durch die Lehrpersonen, sowie die sich daraus ergebenden Möglichkeiten fachlicher Teilhabe der Schüler und Schülerinnen.

- Anna-Marietha Vogler (TU Dortmund) stellte drei aufeinander aufbauende Transkripte vor, welche aus dem interdisziplinären Projekt InterPass stammen. Es handelte sich hierbei um ein dreigliedriges Transkript aus dem Datenkorpus der Unterrichtsstudie des Projektes. Die erste Transkriptsequenz beinhaltet eine Erklärungssituation im Mathematikunterricht. Die zweite eine Diskussionsrunde von Schüler_innen, die über diesen Unterrichtsalltag sprechen und drittens ein Transkript einer Diskussionsrunde bestehend aus Lehrkräften im Rahmen einer Fortbildungsveranstaltung, die sich auf das zweite Transkript der Schüler_innendiskussion beziehen. Der Fokus lag hier in der Betrachtung, welche Wahrnehmungen von Unterrichtsalltag Schüler_innen haben und wie Lehrkräfte professionelle Sichtweisen auf Basis der Analyse der Schüler_innentranskripte entwickeln.

Dank der guten Organisation der Sitzungen (und vor allem der dazwischenliegenden Pausen) von Stefanie Müller-Heise kam auch der informelle Teil der Tagung nicht zu kurz – abgerundet mit abendlichen Besuchen in der Altstadt von Halle.

Birgit Brandt, Universität Halle, Franckeplatz 1, Haus 31, 06099 Halle (Saale)

Email: birgit.brandt@paedagogik.uni-halle.de

Frank Förster, Universität Braunschweig, Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik, Bienenroder Weg 97, 38106 Braunschweig

Email: f.foerster@tu-bs.de

Lehr-Lern-Labore Mathematik

Gründung eines neuen GDM-Arbeitskreises

Landau, 26.–27. 9. 2015

Jürgen Roth, Katja Lengnink und Ann-Katrin Brüning

Anliegen des AK LLL

In den letzten Jahren entwickeln sich an immer mehr Standorten außerschulische Lernorte Mathematik, mit denen in der Regel mehrere Ziele verfolgt werden:

- Schülerlabore bzw. Lernwerkstätten dienen als attraktive außerschulische Lernorte für Mathematik, mit dem Ziel, das Interesse von Schüler/innen an Mathematik zu wecken und/oder zu fördern sowie mathematisches Denken und Arbeiten authentisch erlebbar zu machen.
- Lehr-Lern-Labore ermöglichen eine theorie- und forschungsbasierte sowie praxisnahe Ausbildung von Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik.
- Lehr-Lern-Labore fungieren als Forschungs- umgebung für fachdidaktische und bildungswissenschaftliche empirische Forschung im Sinne einer zyklischen fachdidaktischen Entwicklungsforschung.

Durch den direkten Einbezug von Schüler/innen wird die Praxisrelevanz der fachdidaktischen Forschung sichergestellt. Darüber hinaus können in der Laborumgebung sehr gezielt Einflussvariablen für den Lernprozess variiert und kontrolliert werden.

Lehr-Lern-Labore vereinen damit die Ziele eines Schülerlabors, die vor allem die Förderung von Schüler/innen und ihrer mathematischen Kompetenzen im Blick haben, mit denen der Lehramtsausbildung, die in dieser Form dem Anspruch von Verzahnung von Theorie und Praxis gerecht wird. Zugleich bieten sie eine fruchtbare Umgebung für zahlreiche Forschungsfragen und -methoden (vgl. Roth & Lengnink 2015). In der Chemie- und Physikdidaktik werden Lehr-Lern-Labore und Studien zur ihrer Wirksamkeit immer wieder auf nationalen Fachdidaktik-Tagungen thematisiert. Der Verein LernortLabor – Bundesverband der Schülerlabore e. V. hat einen Schülerlabor-Atlas herausgegeben (LernortLabor 2015) und versucht den Begriff „Schülerlabor“ zu schärfen und zu kategorisieren (Haupt et al. 2013). In selben Jahr haben Baum, Roth und Oechsler (2013) eine spezifische Definition für Schülerlabore Mathematik vorgeschlagen. Auch die Deutsche Telekom Stiftung unterstützt mit dem Entwicklungsverbund „Schülerla-

bore als Lehr-Lern-Labore“ (Nordmeier et al. 2014) seit 2014 den Austausch verschiedener Universitäten und Fachdidaktiken zu dieser Thematik. Um einen intensiven Austausch der mathematischen Lehr-Lern-Labore zu ermöglichen, ist ein Arbeitskreis „Lehr-Lern-Labore Mathematik“ eine wichtige und sinnvolle Organisationsform. Im Rahmen der GDM-Jahrestagung in Basel hat sich innerhalb der Sektion „Lehr-Lern-Labore Mathematik“ der Wunsch herauskristallisiert, die an den Standorten bestehenden Aktivitäten zu bündeln und unter dem Dach der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in einem Arbeitskreis zu vernetzen.

Erste Herbsttagung des Arbeitskreises

Die Gründungstagung und damit die erste Herbsttagung des AK LLL fand am 26. und 27. 9. 2015 in Landau in der Pfalz statt. Es nahmen 12 Standorte mit insgesamt 36 Vertreter/innen teil. Ziel dieser Tagung war es, zunächst einen ersten Austausch zwischen den Betreiber/innen der jeweiligen Lehr-Lern-Labore anzuregen und die Konstituierung des Arbeitskreises vorzunehmen. Dazu wurden die Standorte aufgefordert, Poster und Texte einzureichen, die die Arbeit in den Lehr-Lern-Laboren darstellen sowie deren Konzeption verdeutlichen sollten.

So startete die Tagung mit einem Posterrundgang, bei dem sich die Teilnehmer/innen gegenseitig die Arbeit in den verschiedenen Lehr-Lern-Laboren ihres Standortes vorstellten. Inhaltliche Schwerpunkte waren die Konzeption und die Inhalte der Arbeit im jeweiligen Lehr-Lern-Labor, dessen Einbindung in die Lehre und die mit dem Lehr-Lern-Labor verbundenen Forschungsansätze. Dieser erste Austausch diente dem Überblick über die nationalen Aktivitäten in Lehr-Lern-Laboren Mathematik sowie dem Finden von Anknüpfungspunkten in der Arbeit zwischen den Standorten. Das Spektrum der vorgestellten Lehr-Lern-Labore erwies sich als weit gefächert, etwa von der Förderung von rechenschwachen Kindern, über die Breitenförderung ganzer Schulklassen bis hin zur Begabtenförderung.

Im Anschluss gaben Jürgen Roth für das *Mathematik-Labor* „Mathe ist mehr“ (vgl. Roth 2013)



Gruppenbild der Teilnehmer(innen) (Foto: Privat)

und Melanie Platz für das *Mathematische Umweltlabor* in ihren Vorträgen jeweils einen Einblick in die Lehr-Lern-Labore Mathematik am gastgebenden Standort Landau. Sie gingen jeweils auf das Konzept sowie die Forschung und die Lehre in diesen Lehr-Lern-Laboren ein. Die Labor-Teams führten die Teilnehmer/innen auch durch die Räumlichkeiten, erläuterten die konzeptionelle, inhaltliche und technische Gestaltung des jeweiligen Lehr-Lern-Labors und demonstrierten anhand anschaulicher, authentischer Materialien die Arbeit im Lehr-Lern-Labor. Zudem fand sich genügend Zeit, die interessierten Nachfragen der Besucher/innen zu beantworten und die verschiedenen Facetten der Lehr-Lern-Labor-Arbeit am Campus Landau zu erkunden.

In der anschließenden Schnittstellendiskussion wurden die Themen abgefragt, die die Teilnehmer/innen in Bezug auf Forschung, Lehre, Organisation, Konzeption und Nachhaltigkeit im Rahmen von Lehr-Lern-Laboren besonders interessieren. Die Ergebnisse dieser Sammlung sind Grundlage für die Weiterarbeit innerhalb des Arbeitskreises und fassen die (Forschungs-)Interessen der Mitglieder zusammen.

Das gemeinsame Abendessen in einem italienischen Restaurant am Rande des malerischen Marktplatzes von Landau bot einen entspannten Ausklang des ersten gemeinsamen Arbeitstages und Raum für einen vertiefenden Austausch über die vorgestellten Lehr-Lern-Labore.

Der Sonntag war durch Vorträge und Workshops zu Forschungsschwerpunkten im Rahmen verschiedener Lehr-Lern-Labore geprägt, welche im Folgenden kurz inhaltlich zusammengefasst werden.

Friederike Heinz (Universität Gießen): „Spiele als Instrument zur Lernstandsermittlung? – Entwicklung und Evaluation von mathematischen Lernspielen zur gezielten Bearbeitung sog. ‚Lernhürden‘ beim Rechnenlernen“

Spiele ist im kindlichen Alltag von großer Bedeutung. Ziel des Dissertationsprojektes ist es, mathematische Spiele zum Aufbau eines tragfähigen Grundverständnisses von Zahlen und Operationen zu entwickeln und im Hinblick auf ihr diagnostisches Potential zu evaluieren. Dabei findet eine Orientierung an den wesentlichen Lernhürden beim Rechnenlernen statt. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf Kindern mit mathematischem Förderbedarf. Im Vortrag wurden erste Ergebnisse mit Zweitklässlern skizziert.

Ninja Del Piero & Uta Häsel-Weide (Universität Siegen): „Geometrische Lernumgebungen in der ‚MatheWerkstatt‘“

Im Lehr-Lern-Labor „MatheWerkstatt“ der Universität Siegen wurden im SS 15 die Lernumgebungen „Dreiecke auf dem Geobrett“ und „Perspektiven auf Würfelgebäude“ im Rahmen fachdidaktischer Seminare mit Studierenden (weiter)entwickelt, erprobt und analysiert. Der Vortrag gab Einblick in die Konstruktion der Lernumgebungen, die Arbeitsprozesse und -produkte der Kinder. Ziel und Aufbau des Seminars werden erläutert sowie ein Ausblick auf sich anschließende Forschungsperspektiven gegeben.

Katja Lengnink & Lena Eckhardt (Universität Gießen): „Schülerinnen und Schüler bearbeiten Reflexionsanlässe zur Mathematik – Erste Einblicke“

Reflektieren spielt insbesondere dann eine Rolle, wenn es beim Mathematiklernen nicht nur um das Fachwissen gehen soll, sondern um den Aufbau

eines belastbaren Verhältnisses zwischen Mensch und Mathematik. Bisher ist kaum untersucht, inwieweit Lernende mit Reflexionsanlässen zur Mathematik umgehen können und was sie bei der Bearbeitung solcher Anlässe diskutieren. Die in der Lernwerkstatt Gießen videographierten Bearbeitungen von Reflexionsanlässen durch Schülerinnen und Schüler einer elften Klasse wurden vorgestellt.

Rolf Oechsler (Universität Landau): „Verwendung von Fachsprache in mündlichen Interaktionsprozessen eines Schülerlabors Mathematik“

Auf der Grundlage von Videotranskriptionen, die vor allem die mündlichen Kommunikations- und Argumentationsprozesse von Schüler/inne/n während der selbstständigen Bearbeitung von Labor-Lernumgebungen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ dokumentieren, wird die Verwendung von fachsprachlichen Elementen, insbesondere von mathematischen Fachbegriffen, im Hinblick auf ihre Funktion im Interaktions- und Lernprozess untersucht.

Andreas Büchter (Universität Duisburg-Essen): „Nachhaltigkeits- und Wirksamkeitsfragen von Aktivitäten in Lehr-Lern-Laboren“

In diesem Workshop stellten sich die Teilnehmer/innen die Frage, inwieweit sich die Arbeit in einem Lehr-Lern-Labor auf die beteiligten Personen auswirkt und mit welchen Erhebungsinstrumenten man diese Effekte erfassen kann.

Ann-Katrin Brüning (Universität Münster): „Ideen zur Klassifizierung von Konzepten und Formaten von Lehr-Lern-Laboren im Rahmen eines Lehr-Lern-Labor-Atlas“

Basierend auf der Idee, die Darstellung der Profile verschiedener Lehr-Lern-Labore des Arbeitskreises in eine einheitliche Form zu bringen, wurden im Rahmen dieses Workshops erste Überlegungen zu den Kategorien eines Steckbriefs diskutiert.

Zudem fand im Rahmen der Tagung die konstituierende Sitzung des Arbeitskreises statt. In ihr wurden die strukturelle Organisation des Arbeitskreises sowie dessen weitere Arbeit beschlossen. Zunächst wurden Jürgen Roth und Katja Lengnink als Sprecher bzw. stellvertretende Sprecherin des Arbeitskreises einstimmig gewählt. Ann-Katrin Brüning tritt die Position als gewählte Vertreterin des wissenschaftlichen Nachwuchses an.

Die erste Herbsttagung endete mit einem gemeinsamen Mittagessen in der strahlenden Herbstsonne Landaus. Unser großer Dank geht an Jürgen Roth und alle Organisatoren vor Ort.

Weitere Aktivitäten des Arbeitskreises

Auf der GDM-Tagung in Heidelberg 2016 findet das nächste Zusammentreffen des Arbeitskreises statt. Geplant ist ein Kurz-Workshop mit anschließender Diskussion zum Thema „Videovignetten“. Darüber hinaus werden gemeinsam der inhaltliche Schwerpunkt der nächsten Herbsttagung festgelegt und organisatorische sowie strukturelle Absprachen getroffen. Zudem bietet der Arbeitskreis Lehr-Lern-Labore Mathematik im Rahmen der GDM-Tagung in Heidelberg eine moderierte Sektion mit vier Vorträgen an, in denen jeweils Forschungsergebnisse präsentiert werden.

Zur 2. Herbsttagung des Arbeitskreises lädt das Institut für Didaktik der Mathematik der JLU Gießen vom 23. bis zum 24. 9. 2016 ein. Hier wird unter anderem die Lernwerkstatt Mathematik an der Universität Gießen vorgestellt.

Einladung zur Mitarbeit

Informationen zum Arbeitskreis Lehr-Lern-Labore findet man im Internet unter <http://ak-III.mathe-labor.de>. Interessierte sind herzlich eingeladen, im Arbeitskreis mitzuarbeiten und an den regelmäßigen Herbsttagungen und AK-Treffen teilzunehmen. Wer regelmäßig Informationen zum AK Lehr-Lern-Labore Mathematik und seinen Aktivitäten erhalten möchte schreibt eine E-Mail an Jürgen Roth (roth@uni-landau.de). Er trägt Interessent/inn/en gerne in den E-Mail-Verteiler (ak-III@mathe-labor.de) des Arbeitskreises ein, über den unter anderem auch die Einladungen zu den Herbsttagungen verschickt werden.

Literatur

- Baum, S.; Roth, J.; Oechsler, R. (2013): Schülerlabore Mathematik – Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *Der Mathematikunterricht*, 59(5), S. 4–11.
- Haupt, O.; Domjahn, J.; Martin, U.; Skiebe-Corette, P.; Vorst, S.; Zehren, W.; Hempelmann, R. (2013): Schülerlabor – Begriffsschärfung und Kategorisierung. – In: Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V. (Hrsg.): Zeitschrift MNU. Ausgabe 66/6. Neuss: Klaus Seeberger, S. 324–330.
- LernortLabor – Bundesverband der Schülerlabore e.V. (2015): Schülerlabor-Atlas 2015. Schülerlabore im deutschsprachigen Raum. Markkleeberg: Klett MINT.
- Nordmeier, V., Käpnick, F., Komorek, M., Leuchter, M., Parchmann, I., Priemer, B., Risch, B., Roth, J., Schulte, C., Schwane-wedel, J., Upmeier zu Belzen, A., Weusmann, B. (2014). Hochschulwettbewerb MINT-Lehrerbildung, Deutsche Telekom Stiftung: Antrag auf Finanzierung des Entwicklungsverbundes „Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore: Forschungsorientierte Verknüpfung von Theorie und Praxis in der MINT-Lehrerbildung“. Berlin.
- Roth, J. (2013): Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. – In: *Der Mathematikunterricht*, 59/5, S. 12–20.
- Roth, J. und Lengnink, K. (2015): Sektion „Lehr-Lern-Labore Mathematik“. Erscheint in *BzMU* 2015.

Jürgen Roth, Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen), Institut für Mathematik, Fachbereich 7: Natur und Umweltwissenschaften, Universität Koblenz-Landau (Campus Landau). Fortstraße 7, 76829 Landau
Email: roth@uni-landau.de
Telefon: (06341) 280 31202

Katja Lengnink, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Gießen. Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen
Email: katja.lengnink@math.uni-giessen.de

Ann-Katrin Brüning, Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik, Fachbereich Mathematik und Informatik, Universität Münster. Fliegerstraße 21, 48149 Münster. Email: a_brue22@uni-muenster.de

Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik

Saarbrücken, 2.–4. 10. 2015

Guido Pinkernell

Das Thema der diesjährigen Herbsttagung vom Ende lautete „Alternatives lernen – alternatives Lernen“. Intendiert waren dadurch Beiträge und Diskussionen einerseits über alternative Inhalte für den Mathematikunterricht vor dem Hintergrund allgemeinbildender Fragen zu Informatik und Computer und andererseits über alternative Lernformen, die durch heutige und zukünftige Neue Medien und Werkzeuge möglich sind oder sein sollten.

Die Hauptvorträge „Handy & Co im Mathematikunterricht: Chance oder Nonsense?“ von Andreas Pallack (Arnsberg) bzw. „Entwicklungen und Perspektiven von e-Schulbüchern“ von Dietmar Wagener (Stuttgart) beleuchteten das Thema aus Sicht einer engagierten Schulpraxis bzw. eines Schulbuchverlages. In weiteren sieben Vorträgen zum Thema wurden ergänzende Aspekte aus Schule und Hochschule in die Diskussion eingebracht, siehe hierzu auch <http://www.math.uni-sb.de/lehramt/index.php/ak-mui>.

Einen Schwerpunkt der Tagung über das Tagungsthema hinaus bildete eine grundsätzliche programmatische Diskussion. Im Vorfeld der Herbsttagung in Saarbrücken wurde angekündigt, dass es während des Treffens eine Aussprache zur künftigen Ausrichtung des AK geben soll. Eingeleitet wurde diese dann durch einen Impulsvortrag von Anselm Lambert (Saarbrücken): „Mathematikunterricht und Informatik – eine fast vergessene Perspektive.“ In der dann folgenden Diskussion wurden viele Punkte laut, die auch schon im Vorfeld der Tagung per Mail geäußert wurden: Die traditionelle Kernaufgabe des AK MU&I (man könnte sie verkürzt so formulieren: Konzeptionalisierung, Konkretisierung und Reflektion informa-

tischer Ideen und Produkte für den Mathematikunterricht) war in den ersten Jahren des Arbeitskreises in einer engen Verknüpfung von Informatik und Mathematik begründet. Denn informatische Ideen wie „Algorithmisieren“ sind im Kern mathematische Ideen und können durch Verwendung von Software für den Mathematikunterricht zurückgewonnen werden.

Auch die Reflektion des didaktisch-methodischen Potentials „informatischer Produkte“, also mathematische Software, für das Lernen existierender curricularer Inhalte ist erklärter Gegenstand der Arbeit im AK MU&I. Man sollte also erwarten, dass der AK MU&I auch weiterhin eine Plattform für den Austausch entsprechender Projekte und Unternehmungen im schulpraktischen und didaktischen Bereich ist. Nun ist das aber nicht der Fall. Wir beobachten zum Beispiel, dass viele Akteure auf diesem Gebiet sich in solchen AKs verorten, die sich primär inhaltlich positionieren. Oder man wendet sich spezialisierten Arbeitskreisen zu, die eine fokussierte Arbeit im eigenen Forschungsschwerpunkt erlauben.

Es ergeben sich hieraus zwei Fragen für die zukünftige Arbeit im AK MU&I:

1. Die Frage nach einer programmatischen Umorientierung des AK, der den neuen Gegebenheiten entspricht: Software wird überall im Unterricht und Forschung benutzt bzw. ist Gegenstand von Reflektion und wird nicht mehr als „informatisches Produkt“ wahrgenommen.
2. Die Frage nach einer Umbenennung des AK MU&I: Angesichts der Tatsache, dass bei ubiquitärer Präsenz von Software die informatischen Ursprünge immer weniger präsent scheinen und nun vielerorts das Schlagwort „Digi-

tal“ an die informatischen Ursprünge erinnert, wäre zu überlegen, ob man den Namen des AK so ändert, dass diesem Umstand Rechnung getragen wird.

Guido Pinkernell, Pädagogische Hochschule Heidelberg, Institut für Mathematik und Informatik, Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
Email: pinkernell@ph-heidelberg.de

Arbeitskreis Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich

Schladming, 12.–13. 11. 2015

Evelyn Süß-Stepancik

Die Herbsttagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich“ fand 2015 von 12. 11. bis 13. 11. statt und wurde von Dr. Evelyn Süß-Stepancik (Dozentin an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich) organisiert.

Die Themen der Herbsttagung umfassten Neuerungen und zukünftige Entwicklungen des Arbeitskreises sowie die Präsentationen von Dissertations- und Forschungsprojekten zur Primar- und Sekundarstufe in Österreich.

Am Donnerstag, den 12. 11. 2015, eröffnete das neue SprecherInnen-Team des Arbeitskreises (1. Sprecherin Evelyn Süß-Stepancik und 2. Sprecher Markus Hohenwarter, Johannes Kepler Universität Linz) die Tagung. Es wurden einige aktuelle Dissertationsprojekte an den Universitäten Linz, Graz und Wien vorgestellt und diskutiert.

Den Anfang machte Edith Lindenbauer (Uni Linz) mit dem Thema „Mathematikunterricht mit Technologieeinsatz zur Unterstützung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1“. Hierbei geht es um den Umgang mit den für die Mathematik typischen funktionalen Abhängigkeiten. In der Literatur werden vielfältige Schwierigkeiten von SchülerInnen beim Arbeiten mit Funktionen angeführt. Die Verwendung von dynamischer Mathematiksoftware wie GeoGebra bietet durch die interaktiven Darstellungen die Möglichkeit, die Entwicklung funktionalen Denkens zu fördern. Folgende Aspekte stehen im Zentrum dieses Dissertationsprojekts und werden mit Hilfe einer qualitativen Studie näher beleuchtet: Welche Vorstellungen haben SchülerInnen der Sekundarstufe 1 im Zusammenhang mit funktionalem Denken? Wie können dynamische Materialien gestaltet werden, um SchülerInnen zu unterstützen, geeignete Vorstellungen zu diesem Thema zu entwickeln? Welchen Einfluss haben dynamische Materialien auf

die Vorstellungen von SchülerInnen der Sekundarstufe 1? In diesem Vortrag wurden konkrete dynamische Arbeitsblätter präsentiert und ein Einblick in das Forschungsdesign der entsprechenden Untersuchung gegeben.

Danach stellte Barbara Kimeswenger (Uni Linz) ihr Dissertationsprojekt „Qualitätsaspekte dynamischer Materialien für den Mathematikunterricht“ vor. Wie hinlänglich bekannt, können mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra dynamische Materialien für den Mathematikunterricht erstellt werden. Auf der Plattform GeoGebraTube (www.geogebraTube.org) können sie hochgeladen, bearbeitet und auch in Sammlungen organisiert werden. Mittlerweile befinden sich mehr als 290 000 öffentlich sichtbare Materialien (Stand: November 2015) auf dieser Plattform. Jedoch wird das Suchen von „guten“ Materialien gerade durch diese Fülle an Ressourcen erschwert. Um nicht nur Quantität, sondern auch Qualität auf dieser Plattform zu sichern, beschäftigt sich dieses Dissertationsprojekt mit eben dieser Thematik. ExpertInneninterviews sollen Aufschluss darüber geben, welche Kriterien aus ihrer Sicht maßgeblich für die Qualität dynamischer Materialien für den Mathematikunterricht sind. Im Rahmen des Dissertationsprojektes soll zudem ein Konzept eines neuen Bewertungssystems auf der Plattform GeoGebraTube entwickelt werden, womit das Suchen von „guten“ Unterrichtsmaterialien erleichtert werden soll.

Im Anschluss daran stellte Christian Dorner (Uni Wien) sein Dissertationsprojekt „Schulrelevante Aspekte der Finanzmathematik“ vor, in dem er der Frage nachgeht: „Welche finanzmathematischen Themen kommen für den Mathematikunterricht überhaupt in Frage?“ Es gibt bereits Arbeiten, die die Verbindung von Finanzmathematik und Mathematikunterricht thematisieren. Die

Legitimierung der bisher gewählten Inhalte erfolgt aufgrund der Aktualität, Zugehörigkeit zur Allgemeinbildung, Anwendungsorientierung, ... Die aus den einzelnen Arbeiten entstandene Ansammlung an Ideen und Stoffgebieten aus der Finanzmathematik wirkt insgesamt isoliert und unzusammenhängend. Ein Zugang über *fundamentale Ideen* (im Vortrag *zentrale Ideen* genannt) soll die Verwendung bestimmter finanzmathematischer Themen für den Unterricht aus dem Fach heraus rechtfertigen. Das Auffinden solcher Ideen erfolgt über einen qualitativen Zugang: Anhand von ExpertenInneninterviews werden zentrale Ideen der Finanzmathematik gewonnen. Zwei zentrale Ideen „Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik“ und „Zeitwert des Geldes“ wurden im Vortrag näher vorgestellt.

Abgerundet wurde dieser erste Tagungsschwerpunkt durch die bereits abgeschlossene Dissertation von Klaudia Singer (Uni Graz), die die Auswirkungen der neuen Reifeprüfung Mathematik auf den Unterricht erforschte. Ihre österreichweite empirische Querschnittsuntersuchung in der Implementierungsphase der neuen Reifeprüfung lässt den Schluss zu, dass die Mathematik-Lehrkräfte der AHS-Oberstufe durch die neue Form der Reifeprüfung wenig Qualitätsverbesserung im Sinne der Ziele der Reform erkennen können. In Zusammenhang mit dem Aufbau längerfristig verfügbarer mathematischer Kompetenzen sind die Bereiche Diagnostik und Assessment im Klassenzimmer in Verbindung mit dem Einsatz geeigneter Aufgabenstellungen von elementarer Bedeutung. Einige Ergebnisse der eingangs genannten Untersuchung belegen einmal mehr, dass es für eine gute Unterrichtsentwicklung nicht reicht, den Lehrpersonen Konzepte zu präsentieren. Die Lehrkräfte müssen die Gelegenheiten und die Chance erhalten, diese über einen längeren Zeitraum individuell umzusetzen, zu erproben und zu adaptieren und ihre Arbeit zu reflektieren. Dazu bedarf es jedoch einer geeigneten Begleitung und der Bereitstellung passender Strukturen und Materialien.

Beendet wurde dieser erste Tag von Jürgen Maaß und Markus Hohenwarter mit der Vorstellung der neuen Promotionsordnung für Fachdidaktik Mathematik an der Johannes Kepler Universität Linz und Berichten einiger pädagogischer Hochschulen und Universitäten.

Am Freitag wurde die Tagung mit weiteren Mitteilungen der pädagogischen Hochschulen und Universitäten fortgesetzt. Zentraler Aspekt der Berichte war zumeist die in Österreich neue Ausbildung der Sekundarstufenlehrkräfte. Erstmals wird das Lehramtsstudium für die gesamte Sekundarstufe in Österreich in Verbänden zwischen Universitäten und pädagogischen Hochschulen durchge-

führt. Dieses gemeinsame Vorhaben wird je nach Region bereits angeboten oder startet mit dem kommenden Studienjahr.

Interessante Eindrücke brachte auch Beatrix Hauer (Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz) von der 4. Herbsttagung „Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen“ in das Treffen des österreichischen Arbeitskreises ein.

Der weitere Vormittag war zu einem Großteil dem Mathematikunterricht der Primarstufe gewidmet. Brigitte Makl-Freund (Pädagogische Hochschule Niederösterreich) referierte über das Forschungsprojekt „NÖbegabt5-7“. Dieses Projekt, das in Kooperation mit der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster erfolgt, setzt sich mit Fragestellungen zum Aufspüren von Indikatoren, die auf mathematische Potenziale bei Kindern im Alter von fünf bis sieben Jahren verweisen, auseinander und berücksichtigt die komplexe Transition vom Kindergarten in die Volksschule sowie die Entwicklung von qualifizierenden Elementen für PädagogInnen. Die theoretischen Ausgangspositionen lassen sich im Wesentlichen auf das von Fuchs, Käpnick und Talhoff entwickelte Modell festmachen. Eingebettet darin soll gezielt mittels Indikatoraufgaben Auskunft über Begabungslagen und Entwicklungsfortschritte gegeben werden. Diagnose ist hier als ein feinfühligere theoriebasierter Prozess aufgefasst, der Merkmale zu identifizieren vermag, die im theoretischen Konstrukt eine Rolle spielen. Das Projekt ist als Felduntersuchung im Paneldesign über drei Jahre angelegt und startete 2014 an 17 repräsentativen Kindergartenstandorten in NÖ sowie punktuell in Münster.

Maria Fast setzte fort mit ihrem Dissertationsthema „Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen in der Volksschule“. Die Studie geht der Frage nach, wie Schülerinnen und Schüler von der zweiten bis zur vierten Schulstufe Additionen und Subtraktionen zwei- und mehrstelliger Zahlen lösen. In einer Längsschnittstudie (Panelstudie; $N = 44$) mit sechs Erhebungszeitpunkten wurden Lösungswege und Lösungsquoten erhoben und ausgewertet. Als Ergebnis kann festgehalten werden, dass fast alle Entwicklungsverläufe in denselben Ausprägungen bleiben. Schülerinnen und Schüler scheinen ein bestimmtes Verständnis von Zahlen und den damit zusammenhängenden Lösungsmethoden zu haben, das sie über Jahre beibehalten. Die niedrigsten Lösungsquoten und die unsichersten Konzepte treten bei Schülerinnen und Schülern auf, welche ausschließlich in die einzelnen Stellenwerte zerlegen und diese verknüpfen. Erfassen die Kinder hingegen Zahlen als Ganzes und rechnen dadurch

schrittweise bzw. praktizieren Ableitungsstrategien, reduzieren sich die Stellenwertfehler und die Lösungsquote steigt.

Michael Gaidoschek (Universität Klagenfurt/Pädagogische Hochschule Kärnten) schloss den Themenkreis mit einer aktuellen Studie zum Arithmetikunterricht im 1. Schuljahr (vgl. Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler, in Begutachtung). Erfasst wurden die Klassen von acht Lehrkräften, die an einer Fortbildungsreihe teilgenommen hatten; vier davon wurden während des Schuljahres regelmäßig von einer erfahrenen Lehrkraft besucht. Alle acht Lehrkräfte haben der Fortbildung gemäß einen klaren Fokus auf das Erarbeiten von Ableitungsstrategien gelegt. Tendenziell scheinen die begleiteten Lehrkräfte der Festigung von Strategien mehr Aufmerksamkeit gewidmet zu haben. Bei den Kindern zeigen sich zwischen den Klassen markante Unterschiede in der Häufigkeit zählenden Rechnens. In den begleiteten Klassen wurde seltener auf Zählstrategien zurückgegriffen. In *allen acht* Klassen war zählendes Rechnen deutlich seltener, als dies in einer älteren Studie für ErstklässlerInnen erhoben wurde, deren Unterricht *nicht* auf Ableitungsstrategien fokussierte.

Mit einem erneuten inhaltlichen Wechsel zur Sekundarstufe 1 schloss Ann Cathrice George (bifie Salzburg) mit ihrem Beitrag „Geschlechterunterschiede in mathematischen Sub-Kompetenzen“ das inhaltlich reichhaltige Programm der Herbsttagung ab. Sie legte dar, dass Large-Scale Daten neben dem Bildungsmonitoring auch für Detailanalysen über Kompetenzen genutzt werden können. Empirisch spiegelt sich dies in Modellen wieder, die – anders als die üblichen Modelle – direkt auf dem zugrundeliegenden Kompetenzmo-

dell aufbauen. Die Messung mathematischer Fähigkeiten in Large-Scale Studien wie TIMSS oder BIST basiert auf einer theoretischen Klassifizierung in eine Inhalts-, eine Prozess- und eine Anforderungsdimension. Die empirische Auswertung erfolgt allerdings unabhängig in der Inhalts- und in der Prozessdimension. Alternativ schlagen sie und andere eine Auswertung (mit CDMs) auf den Knoten zwischen inhaltlichen und kognitiven Subkompetenzen vor. Diese Methodik spiegelt das theoretische Kompetenzmodell wieder und erlaubt einen direkten Vergleich zwischen den Kompetenzknoten. Basierend darauf sind weitere Analysen wie beispielsweise die Bestimmung von Geschlechterdifferenzen in den Knoten möglich.

Zum Ende der Tagung wurden unter Allfälligem auch Programmpunkte für zukünftige Arbeitskreistreffen (z. B. Strategien des AK, Erfahrungsaustausch, Fortbildungen) beschlossen und ein Beitrag zu den Erinnerungen an die Gründung des österreichischen Arbeitskreises für das Jubiläumshft der GDM diskutiert.

Zu guter Letzt sei noch auf die neue Webseite des GDM-AK „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich“ verwiesen. Sie erfuhr einen Relaunch an der Johannes Kepler Universität Linz (<http://www.jku.at/gdm-ak>), nachdem auf der 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Basel die beiden Sprecherinnen Edith Schneider (acht Jahre 1. Sprecherin) und Susanne Eisner (vier Jahre 2. Sprecherin) ihre Funktionen zurückgelegt hatten und das neue SprecherInnen-Team gewählt wurde.

Evelyn Süss-Stepancik, Pädagogische Hochschule für Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden, Österreich, Email: evelyn.stepancik@ph-noe.ac.at

Arbeitskreis Problemlösen

Ein Blick zurück, ein Blick nach vorn

Benjamin Rott und Ana Kuzle

Wir möchten die Jubiläumsausgabe der *Mitteilungen* nutzen, um die bisherigen Aktivitäten des Arbeitskreises Problemlösen kurz zusammenzufassen und um unsere Pläne für 2016 anzukündigen.

Ein Blick zurück

Nach ersten Vorgesprächen auf einem Symposium zum Problemlösen im September 2013 in Braunschweig (F. Heinrich) wurde der Arbeitskreis

im März 2014 während der GDM-Tagung in Koblenz gegründet. Bereits im Oktober 2014 fand die erste Herbsttagung in Münster (M. Stein) statt (ein Bericht hierzu findet sich in den *Mitteilungen* 98). Der zugehörige Tagungsband „Problemlösen gestalten und beforschen“ ist mittlerweile im WTM-Verlag erschienen.

Während der GDM-Tagung 2015 in Basel fand ein Treffen des Arbeitskreises statt, bei dem die zukünftige Arbeit diskutiert wurde. Die zweite Herbsttagung wurde – gemeinsam mit der jährlich stattfindenden ProMath-Tagung – in Halle (T. Fritzlar) ausgerichtet. Der zugehörige Tagungsband wird 2016 im WTM-Verlag erscheinen. T. Fritzlar blickt zurück:

Vom 3. bis 5. September 2015 fand die 17. Konferenz „Problem Solving in Mathematics Education“, zugleich Herbsttagung des Arbeitskreises Problemlösen, an der Martin-Luther-Universität in Halle statt. An der Tagung nahmen knapp 50 Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus sechs Ländern teil, die weiteste Anreise nahmen dabei vier Kollegen aus Singapur in Kauf. Neben einer Posterausstellung fanden 24 Vorträge statt, die ein breites Spektrum problemorientierten Mathematiklernens und -lehrens eröffneten. So wurden beispielsweise Forschungsprojekte zur Gestaltung problemorientierten Mathematikunterrichts und zum Einbezug von Beispielen oder Strategiehinweisen in einem solchen Unterricht vorgestellt, Projekte zur Rolle von Reflexion bei der Auseinandersetzung mit mathematisch reichhaltigen Problemstellungen und zum Problemlösen in Algebra, Kombinatorik und Stochastik.

Abgerundet wurde die Tagung in den für die UNESCO-Welterbeliste nominierten Franckeschen Stiftungen durch ein gemeinsames Abendessen, den Besuch der Experimente-Werkstatt Mathematik am Institut für Mathematik sowie einen geführten Rundgang durch die Hallesche Altstadt.

Schließlich wurde 2015 ein Sonderheft zum Thema „Problemlösen“ bei der Zeitschrift *mathematica didactica* organisiert, das nach derzeitiger Planung Ende 2016 erscheinen soll.

Ein Blick nach vorn

Im Rahmen des Arbeitskreistreffens während der GDM-Tagung 2016 in Heidelberg wird Lars Holzapfel einen Vortrag mit dem Titel „Problemlösen lernen in der Sekundarstufe, im Lehramtsstudium und in der Lehrerfortbildung“ halten. Problemlösen gewinnt zunehmend an Bedeutung in der Schule. Dies spiegelt sich in den Bildungsstandards und Bildungsplänen wider. Entsprechend bedarf es der Entwicklung geeigneter Unterrichtskonzepte und Aufgaben einerseits, andererseits

aber auch Programme für die Lehramtsausbildung und nicht zuletzt für die Lehrerfortbildung.

Anhand konkreter Beispiele werden zentrale Aspekte des Problemlösens dargelegt und Erfahrungen aus der Arbeit mit Studierenden und aus der Lehrerfortbildung berichtet. Dabei werden auch Daten aus Forschungsprojekten vorgestellt.

Am 14. und 15. 10. 2016 findet an der Technischen Universität Braunschweig die Herbsttagung des Arbeitskreises Problemlösen statt. Die örtliche Tagungsleitung unter Federführung von Frank Heinrich bemüht sich im Zusammenwirken mit den Arbeitskreissprechern Ana Kuzle und Benjamin Rott um ein interessantes Programm. Die Zusage für einen Gastvortrag hat bereits Herr Prof. Dr. Harald Schaub (IABG, Ottobrunn bei München) gegeben. Er wird aus der Sicht der Bezugswissenschaft (Denk-)Psychologie über Möglichkeiten zur Förderung von (mathematischer) Problemlösekompetenz sprechen. Weitere Informationen zu Inhalten, Ablauf und Anmeldemodalitäten werden im Anschluss an die GDM-Jahrestagung gegeben.

Schließlich möchten wir auch auf die ProMath-Tagung im kommenden Jahr hinweisen. A. Kuzle blickt nach vorn: Die Tagung der europäischen ProMath-Gruppe findet vom 7.9. bis 9.9.2016 an der Universität Zadar, Kroatien statt. Diese wird von Maja Cindric unter Unterstützung von Ana Kuzle ausgerichtet. Das Thema der Tagung lautet „Opportunities and Challenges of Teaching through Problem Solving“. Weitere Informationen befinden sich auf der Tagungsseite (www.promath.org).

Interessierte sind als weitere Mitglieder herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecherin bzw. den Sprecher des Arbeitskreises, Ana Kuzle und Benjamin Rott.

Benjamin Rott, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen, E-Mail: benjamin.rott@uni-due.de

Ana Kuzle, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Karl-Liebknecht-Straße 24–25, 14476 Potsdam, E-Mail: kuzle@uni-potsdam.de

Arbeitskreis Psychologie und Mathematikdidaktik

Rauischholzhausen, 16.–17. 10. 2015

Anke Lindmeier

Der Arbeitskreis „Psychologie und Mathematikdidaktik“ traf sich dieses Jahr mit knapp 30 Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Herbsttagung wieder im Schloss Rauischholzhausen, der Tagungsstätte der Justus-Liebig-Universität Gießen.

Ausführlich vor- und zur Diskussion gestellt wurden vier Forschungsprojekte von Ulrike Dreher, Julia Stemmer/Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Denise Lenz und Ulrike Siebert.

Die Arbeit von Ulrike Dreher fokussiert dabei auf Fähigkeiten von Lernenden der Sekundarstufe im Umgang mit Repräsentationen von funktionalen Zusammenhängen. Sie untersucht mögliche Einflussfaktoren der individuellen Präferenz für eine Repräsentationsart sowie Selbstwirksamkeitserwartungen, wobei sie darstellte, wie in dieser Arbeit auf Grund der Spezifität des Untersuchungsgegenstands eine Reihe methodischer Herausforderungen zu lösen waren. Gleich zwei Arbeiten forderten die Teilnehmer dieses Jahr dazu auf, sich in frühe mathematische Bildungsprozesse einzudenken. Dabei untersucht die Arbeit von Julia Stemmer und Elisabeth Rathgeb-Schnierer die Interaktion von Kindergartenkindern bezüglich mathematischer Argumentationsprozesse bei Regelspielen, wobei die Frage danach, wie diese identifiziert und bewertet werden können im Vordergrund stand. Denise Lenz präsentierte eine Serie von Aufgaben, die sich zur Untersuchung relationalen Denkens sowie dem Umgang mit unbekanntem Mengen vom Kindergarten- bis zum Primarstufenalter eignen. Dabei zeigt sich, dass frühe Fähigkeiten evident gemacht werden können. Ulrike Siebert forderte mit ihrem Vortrag zu mathematischen Anforderungen in der kaufmännischen Berufsausbildung schlussendlich noch einmal die kognitive Flexibilität der Arbeitskreismitglieder ein. Die Arbeit zeigte deutlich auf, wie unterschiedlich berufliche und allgemeinbildende Konzeptionen von mathematischer Kompetenz zu Herausforderungen für die empirische Untersuchung von Kompetenzentwicklung am Übergang zur Berufsausbildung führen, weswegen zu diesem Zweck ein Konstrukt der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz vorgeschlagen und begründet wurde.

Die ausführlichen und professionellen Vorträge ermöglichten einen tiefen Einblick in die Projekte, wobei gemäß der Ausrichtung des AKs insbe-

sondere die theoretischen und methodischen Bezüge zur Psychologie deutlich erkennbar waren. Auch gelang es wieder, den Werkstattcharakter des Herbsttreffens umzusetzen und eine konstruktiv-kritische Diskussionskultur zu gestalten. Im Namen aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer darf ich dafür den Vortragenden für ihre Bereitschaft danken, ihre Arbeiten ausführlich vor- und zur Diskussion zu stellen! Gegenstand der Vorträge und Kernpunkte der Diskussion finden Sie im Folgenden.

Ulrike Dreher, Pädagogische Hochschule Freiburg: Der Einfluss von Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen auf den Umgang mit graphischen und numerischen Repräsentationen von linearen Funktionen

Die Vermittlung des Begriffsverständnisses von funktionalen Zusammenhängen ist ein wichtiges Ziel in der Sekundarstufe I (KMK, 2004), jedoch stellt sich nach wie vor die Frage, welche Faktoren die Lernenden in der Anwendung der verschiedenen Repräsentationen beeinflussen, bzw. sogar daran hindern, Repräsentationen von Funktionen vollständig, reflektiert und adaptiv zu nutzen.

Die Überzeugungen zum sicheren Umgang mit Repräsentationen konnten bereits bezüglich spezifischer Themengebiete in Fragebogenformaten erhoben werden (vgl. Gagatsis et al., 2009), ebenso ist es möglich differenzierende Leistungsmessungen durchzuführen (vgl. Bayrhuber et al., 2010). Ziel des Dissertationsvorhabens ist, die Zusammenhänge zwischen individuumsabhängigen Faktoren im Umgang mit den verschiedenen Repräsentationen der linearen Funktion (Präferenz für und Selbstwirksamkeit im Umgang mit Graph und Tabelle) mit der Leistungskomponente in diesem Themenbereich aufzudecken. Mittels eines Mixed-Methods-Designs wurden in Klassenstufe 8 die Wirkungen von Präferenz und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen der Lernenden auf die Anwendung und den Umgang mit den Repräsentationen quantitativ ($N = 266$) erfasst. In einem ergänzenden qualitativen Studienteil wird durch Einzelinterviews ($N = 8$) eine Vertiefung der Erkenntnisse über die Rolle der Präferenzen und weiterer Faktoren angestrebt. Das Projekt ist Teil des interdisziplinär ausgerichteten Promotionskollegs VisDeM (Visualisierungen im Deutsch- und Ma-

thematikunterricht). In diesem Rahmen wird einerseits das Lernen von Inhalten mittels Visualisierungen, andererseits das Anwenden von Visualisierungen zur Problembearbeitung fokussiert.

Bereits in der Vorstudie konnte gezeigt werden, dass sich die Konstrukte Präferenz und Selbstwirksamkeit trennen lassen und einzelne Subskalen Informationen bezüglich der Trennbarkeit nach Repräsentationsart (Tabelle und Graph) liefern können. Durch den mehrfachen Einsatz der Skalen wurde aufgedeckt, dass Lernende sich ihrer Präferenzen stabil bewusst sind und die Selbstwirksamkeitsüberzeugungen während der unterrichtlichen Erarbeitung stärker ausgeprägt vorliegen. Im Vortrag wurde die Rolle der Präferenzprofile und der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen thematisiert. Dabei wurde ein Schwerpunkt auf die Definition und Operationalisierung der Konstrukte gelegt. Ein weiterer Schwerpunkt lag auf der Diskussion der Ergebnisse der Vorstudie und der Auswertungsmethodik der Hauptstudie.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

Zunächst konzentrierte sich die Diskussion auf die Definition und Ausarbeitung der Konstrukte. Vor allem das Konstrukt der Präferenz für eine Repräsentationsform und dessen Rolle im Lernprozess wurde ausführlich diskutiert. Ebenso wurden die verschiedenen Arten der Operationalisierung (direkt oder indirekt) und die damit einhergehenden messmethodischen Konsequenzen hinterfragt. Aufgrund dieser Diskussion konnten die zu Grunde gelegten Konstrukte weiter ausgeschärft und abgegrenzt werden, was zur Präzision der Forschungsfrage und Ergebnisinterpretation beiträgt.

Die Diskussion und der anschließende informelle Austausch während der Tagung waren für das Fortschreiten dieser Arbeit hilfreich. Insbesondere wurde in der weiteren Diskussion deutlich, dass mit Hilfe der umfassenden Datenbasis weitere Teilfragen bearbeitet werden können.

Julia Stemmer und Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Pädagogische Hochschule Weingarten, Mathematische Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspielen

Verschiedene Autoren (z. B. Bruner, 1996; Cobb & Bauersfeld, 1995; Kaufmann, 2010; Krummheuer, 1997; Peter-Koop, 2006; Vygotsky, 1978) heben in unterschiedlichen Zusammenhängen die Bedeutung von Interaktionen für das Lernen hervor. Daran anknüpfend befasst sich die Dissertation mit mathematischen Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspielen. Die Datenerhebung fand im Rahmen des von der Internationalen Bodenseehochschule geförderten Pro-

jekts „Spielintegrierte Mathematische Frühförderung (spimaf)“ statt. Der Fokus lag dabei auf dem konkreten Handeln der Kinder mit den Spielmaterialien sowie auf den verbalen und nonverbalen Interaktionen, die videographiert wurden. Die entstandenen Videoaufnahmen wurden im Hinblick auf das Forschungsinteresse strukturiert und analysiert. Wesentliche Schritte dabei waren die Definition einer mathematischen Interaktion, die Strukturierung des Datenmaterials anhand dieser Definition, das Bestimmen von Interaktionsauslösern, die Analyse der Interaktionen im Hinblick auf die Argumentationen der Kinder sowie die Betrachtung struktureller Besonderheiten der Interaktionen. Im Vortrag wurden das methodische Vorgehen, das Analyseinstrument und erste Ergebnisse präsentiert.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

In der anschließenden Diskussion lag der Schwerpunkt zunächst auf der Analyse der Argumentationen. Dabei wurde diskutiert, inwiefern die Interaktionen anhand der funktionalen Argumentationsanalyse nach Toulmin (1969) strukturiert werden können. Auch wurde diskutiert, ob die Dimensionen der Argumente einer Qualitätsstufung entsprechen oder ob diese als gleichwertige Kategorien anzusehen sind. Aus dem ersten Diskussionspunkt eröffnete sich mir die Perspektive, dass die mathematischen Interaktionen zwar in Anlehnung an Toulmin strukturiert werden können, eine deutlichere Abgrenzung zum Verständnis von Argumentationen im Sinne Toulmins aber notwendig erscheint. Durch die Strukturierung der Interaktionen anhand des Toulmin-Schemas können Argumentationsbestandteile nachvollziehbar identifiziert und herausgefiltert werden, woraus sich aber nicht zwingend eine Qualitätsstufung ableiten lässt. Vielmehr können die Argumentationen dann im nächsten Schritt feinkörniger hinsichtlich ihrer Tiefe analysiert werden.

Weiter konnte in der Diskussion das übergreifende Ziel des Promotionsvorhabens und die Frage danach, wie die verschiedenen Analysen im Forschungsprozess zusammengebracht werden können thematisiert werden. Hilfreich erscheinen vor allem die Impulse, wie das verfolgte Ziel noch kohärenter aufgezeigt werden kann.

Denise Lenz, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Relationales Denken und das Umgehen mit unbekanntem Mengen. Eine Studie mit Vor- und Grundschulkindern

International wird der Einbezug algebraischer Inhalte in den Mathematikunterricht der Grundschule stark diskutiert. Ein wichtiger Aspekt algebrai-

schen Denkens stellt das relationale Denken als das Herstellen von Beziehungen zwischen Mengen, Zahlen und Operationen dar. Ein zweiter wichtiger Aspekt der Algebra ist das Umgehen mit Unbekannten. Zahlreiche Studien geben Einblicke in die Fähigkeiten zum Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen (vgl. u. a. Carpenter et al., 2005, Steinweg, 2004) beziehungsweise zur Ausbildung erster Variablenvorstellungen (vgl. u. a. Akinwunmi, 2012, Specht, 2009).

Im Rahmen des Dissertationsprojektes wurden Untersuchungsmaterialien und -aufgaben entwickelt, die eine Verknüpfung beider Konzepte durch das Herstellen von Beziehungen zwischen unbekanntem Mengen (Schachteln und Murmeln) ermöglichen. In klinischen Interviews mit Vorschülern sowie Zweit- und Viertklässlern wurde erkundet, inwiefern bereits von Kindern dieser Altersgruppen Beziehungen zwischen unbekanntem Mengen beschrieben und für die Bearbeitung genutzt werden. Im Vortrag wurde die Aufgabenkonzeption vorgestellt und Einblicke in die Interviews gegeben. Der Fokus lag in der anschließenden Vorstellung des Auswertungsschemas, welches das Beschreiben von Beziehungen zwischen Mengen und den Umgang mit Unbekanntem beschreibt.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

Die anschließende Diskussion bezog sich zunächst darauf, das Erkenntnisinteresse der Studie in Hinblick auf den aktuellen Forschungsstand und die dargestellte Forschungslücke zu präzisieren. Die kritisch-konstruktiven Rückmeldungen regten dazu an, Bedingungsfaktoren der festgestellten unterschiedlichen Fähigkeiten der Untersuchungsgruppe in den Blick zu nehmen. So wurde aufgeworfen, dass die einzelnen Aufgabenstellungen des Interviews zu Lerneffekten führen könnten. Dies sollte bei der qualitativen Auswertung stärker in den Blick genommen werden, beispielsweise indem die Reihenfolge der Aufgabebearbeitung berücksichtigt wird. Weiter kam die Frage auf, inwiefern sprachliche Kompetenzen der Kindergartenkinder berücksichtigt werden können, um zu noch differenzierteren Aussagen zu gelangen. Zusammenfassend wurde festgestellt, dass sich die entwickelten Aufgaben und das Untersuchungsdesign gut eignen, um zu erkunden, welche Beziehungen zwischen unbekanntem Mengen Vor- und Grundschulkindern bereits beschreiben können.

Die Verzahnung zwischen dem Bereich des relationalen Denkens und des Umgehens mit unbekanntem Mengen kann als Stärke des Auswertungsschemas besonders herausgestellt werden.

Ulrike Siebert und Aiso Heinze, IPN Kiel, Erfassung der mathematischen Kompetenz von Industriekaufleuten in der dualen beruflichen Erstausbildung

Mathematische Kompetenzen besitzen in der beruflichen Bildung einen zentralen Stellenwert, da sie in beruflichen Anforderungssituationen und damit in Curricula immanent sowie prädiktiv im Hinblick auf die berufliche Fachkompetenz sind (Lehmann & Seeber, 2007). Gleichzeitig liefern empirische Studien am Übergang in die berufliche Erstausbildung Hinweise auf mathematische Defizite von Auszubildenden bei der Bearbeitung von mathematikhaltigen beruflichen Anforderungssituationen (Stark, 2000). Die Dissertation, die im Rahmen des ManKobE-Projekts entsteht, thematisiert die Modellierung mathematischer Kompetenz in der allgemeinen und beruflichen Bildung. Interessant ist dabei insbesondere, welche Rolle schulisch erworbene mathematische Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung spielen und wie sie in beruflichen Anforderungssituationen wirksam werden können.

In dem Vortrag wurden am Beispiel des Ausbildungsberufs „Industriekaufmann/-frau“ spezifische Aspekte der mathematischen Kompetenz im Beruf mittels einer Inhalts- und Anforderungsanalyse der berufsspezifischen Lernfelder herausgearbeitet. Die Ergebnisse der Analyse bildeten die Grundlage für eine inhaltliche und prozessbezogene Ausdifferenzierung des zuvor abstrakt definierten Konstrukts „berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz“ zur Modellierung der mathematischen Kompetenz von kaufmännischen Auszubildenden. Abschließend wurden ein Test zur Erfassung dieser berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz von kaufmännischen Auszubildenden sowie erste empirische Ergebnisse vorgestellt.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

In der sich anschließenden Diskussion wurden die theoretischen Ansätze zur Modellierung mathematischer Kompetenzen aufgegriffen. Hierbei richtete sich der Fokus zunächst auf die am Anfang des Vortrags dargestellte Gruppierung der in der berufsschulischen Ausbildung auftretenden mathematischen Probleme und deren Charakterisierung anhand der drei „Typen mathematischen Arbeitens“ (Blum et al., 2004). Es wurde angeregt, die bisherige Darstellung um einen Bezug zum Prozessmodell des mathematischen Modellierens zu ergänzen und die Rolle des kaufmännischen Kontextes noch stärker zu explizieren.

Die Rückmeldungen gaben auch Anlass dazu, die Notwendigkeit eines „neuen“ Konstrukts zur Beschreibung und Untersuchung der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenzen von kauf-

männischen Auszubildenden stärker auszuarbeiten. Dabei sollten vorliegende, zum großen Teil bereits ältere Arbeiten zu mathematischen Inhalten und Kompetenzen im Beruf sowie zu möglichen Erklärungsansätzen für mathematische Probleme noch stärker auf die aktuelle Problemstellung bezogen werden. Insgesamt war die Diskussion sehr konstruktiv und gewinnbringend für die weitere theoretische Beschreibung und Fundierung des Konstrukts der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenzen.

Organisatorisches und Ausblick

Auf organisatorischer Seite gibt es noch über die turnusgemäße Wahl einer der beiden Sprecherinnen zu berichten. Silke Ruwisch wurde einstimmig für eine erneute Wahlperiode als Sprecherin bestätigt. Wir freuen uns über ihr fortdauerndes Engagement!

Im Jahr 2016 werden sich die Mitglieder des AKs Psychologie und Mathematikdidaktik voraussichtlich vom 14. bis 15. Oktober im Schloss Rauischholzhausen einfinden, um bis zu vier neue Projekte rege zu diskutieren. Dabei soll das Forum wieder für fortgeschrittene oder kurz vor dem Abschluss stehende Arbeiten – die nicht notwendigerweise Promotionsarbeiten sein müssen – offen stehen. Sie sollten dazu bereit sein, die Arbeiten im Sinne eines Werkstattberichts zur Diskussion zu stellen. Ihr Interesse an einer aktiven Tagungsteilnahme können Sie bei einer der beiden Sprecherinnen Silke Ruwisch (ruwisch@uni.leuphana.de) oder Anke Lindmeier (lindmeier@ipn.uni-kiel.de) bekunden.

Auf der GDM 2016 wird der AK Psychologie und Mathematikdidaktik keine planmäßige Aktivität anbieten, es besteht aber jederzeit die Möglichkeit, sich unter http://www.leuphana.de/gdm_psychologie über unsere Ziele und Aktivitäten zu informieren. Möchten Sie in den Mailverteiler aufgenommen werden, so kontaktieren Sie uns einfach!

Gemeinsames Literaturverzeichnis

- Akinwunmi, A. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Bayrhuber, M., Leuders, T., Bruder, R., Wirtz, M. (2010). Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO. *Zeitschrift für Pädagogik (Beiheft 56)*, 28–39.
- Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfing, F. & Carstensen, C. H. (2004). Mathematische Kompetenz. In Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 47–92). Münster, New York: Waxmann.
- Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M.L., Koehler Zeringue, J. (2005). *Algebra in elementary school: Developing relational thinking*. *ZDM*, 37 (1), 53–59.
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Hrsg.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., Elia, I. (2009). *Student's belief about the use of representations in the learning of fractions*. In Proceedings of CERME 6. Lyon, France, 28. 1.–1. 2. 2009, 64–73.
- Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Schroedel.
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Luchterhand.
- Krummheuer, G. (1997). *Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Lehmann, R. & Seeber, S. (Hrsg.) (2007). *ULME III: Untersuchung von Leistungen, Motivation und Einstellungen der Schülerinnen und Schüler in den Abschlussklassen der Berufsschulen*. Hamburg: Hamburger Institut für berufliche Bildung (HIBB).
- Peter-Koop, A. (2006). Grundschkinder bearbeiten Fermi-Aufgaben in Kleingruppen – Empirische Befunde zu Interaktionsmustern. In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.). *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. Festschrift für Sybille Schütte zum 60. Geburtstag* (S. 41–56). München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg Schulbuchverlag.
- Specht, B. J. (2009). *Variablenverständnis und Variablen verstehen: empirische Untersuchungen zum Einfluss sprachlicher Formulierungen in der Primar- und Sekundarstufe*. Hildesheim: Franzbecker.
- Stark, R. (2000). Experimentelle Untersuchungen zur Überwindung von Transferproblemen in der kaufmännischen Erstausbildung. *Zeitschrift für Pädagogik* 46(3), 395–415.
- Steinweg, A. S. (2004). Why 25+4 might be 54 – Children's interpretation of uncompleted equations. *Paper presented at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME)*. www.uni-bamberg.de/fileadmin/uni/fakultaeten/ppp_professuren/mathematik_informatik/Dateien/steinwegICME.pdf (24. 11. 2015)
- Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge University Press: Cambridge.
- Vygotski, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anke Lindmeier, IPN Kiel, Olshausenstraße 62, 24118 Kiel, Email: lindmeier@ipn.uni-kiel.de

Arbeitskreis Ungarn

Budapest, 2.–3. 10. 2015

Gabriella Ambrus

Der Arbeitskreis Ungarn wurde auf der 49. GDM-Jahrestagung in Basel mit folgenden Zielen gegründet:

- Verstärkung der Beziehungen und der Zusammenarbeit der Mathematikdidaktiker in Ungarn und in den deutschsprachigen Ländern
- Veröffentlichung der erfolgreichen ungarischen mathematikdidaktischen Traditionen
- Aufbauend auf die Erfahrungen auch anderer Länder, die Verbesserung des Mathematikunterrichts und der Situation der Mathematikdidaktik als selbständige Wissenschaft in Ungarn (einschließlich der Nachwuchsfrage und Doktorandenschulen)

Die 1. Tagung des Arbeitskreises fand am 2. und 3. Oktober 2015 an der Eötvös Loránd Universität in Budapest statt. Die Tagung wurde am Freitag um 14 Uhr von dem Direktor des Mathematischen Instituts, Herrn Prof. Dr. Tamás Szónyi, eröffnet. Herr Prof. Dr. Szónyi hat sich gerne an die GDM-Jahrestagung 2008 in Budapest erinnert, und wies in seiner Rede auf den fruchtbaren Effekt solcher internationalen Zusammenarbeit hin.

An der 1. Tagung des AK Ungarn nahmen 19 Kolleginnen und Kollegen aus Ungarn, Deutschland, Österreich und der Schweiz teil. So kam eine gelungene Mischung von Universitäts- und Schulangehörigen zustande, was eine gute Gelegenheit zum Erfahrungs- und Meinungsaustausch zwischen den TeilnehmerInnen bot.

Die Vorträge des Tagesprogrammes hatten folgende gekürzte Abstracts:

Freitag, den 02. Oktober

Bernd Zimmermann, Jena: Mathematikunterricht für normale und besonders begabte Schüler – Wie kann man das verbinden?

Ungarn hat bekanntermaßen eine lange Tradition in der Förderung mathematisch begabter Schüler. Einige ungarische Kollegen bedauern, dass ihrer Meinung nach in Ungarn dem Unterrichten durchschnittlich begabter Schüler zu wenig Gewicht beigemessen würde. Ich möchte einen Ansatz vorstellen, durch den es möglich sein könnte, beide Aspekte miteinander zu verbinden. So werde ich im ersten Teil meines Vortrages kurz die leitenden Ideen des Hamburger Modells zur Förderung mathematisch begabter Schüler vorstellen, das vorrangig von Professor Kießwetter begründet und

geleitet wird. Anschließend werde ich ein Problem aus diesem Projekt vorstellen, das sich auch im Normalunterricht bewährt hat und anhand dieses Beispiels erläutern, welche Eigenschaften derartiger Probleme diese gleichermaßen für besonders begabte und durchschnittlich begabte Schüler geeignet erscheinen lassen.

Johann Sjuts, Osnabrück: Formate zum Aufbau und Nachweis mathematikdidaktischer Kompetenzen

Der Lehrerberuf ist anspruchsvoll, bedeutungsvoll und verantwortungsvoll. Daher gilt: Für ein professionelles Unterrichtshandeln sind berufsfeldbezogene Kompetenzen in einer systematisch angelegten Lehrerbildung vorgängig zu erwerben. Zu ihnen zählen in besonderem Maße fachdidaktische Kompetenzen – selbstverständlich auch im Fach Mathematik. Fachbezogene Lehr-Lern-Prozesse nach wissenschaftlichen Erkenntnissen zu planen, zu gestalten, durchzuführen und auszuwerten, ist ein essentieller beruflicher Anspruch.

Michael Gaidoschik, Klagenfurt: Einmaleinslernen ohne Reihen – ein Unterrichtsversuch

Die meisten Erwachsenen – auch solche, die heute das Einmaleins unterrichten – haben es einst „Reihe für Reihe“ auswendig gelernt. Die Fachdidaktik rät demgegenüber seit langem, intensiv an Ableitungsstrategien zu arbeiten, d.h. von wenigen sogenannten „Kernaufgaben“ ausgehend alle anderen Einmaleinsaufgaben rechnerisch zu erschließen. Wie aber lässt sich dieser allgemeine Rat konkret im Unterricht umsetzen? Eine Variante sind „kurze Reihen“, in denen das Ableiten jeweils innerhalb einer Reihe thematisiert wird. Ich halte das für inkonsequent – und vermute, dass die Lernchancen steigen, wenn wir in den ersten Monaten der Einmaleinsarbeit auf das Gerüst der Reihen gänzlich verzichten. Ein entsprechendes Unterrichtskonzept habe ich 2014 in Buchform vorgelegt; im Vortrag stelle ich es kurz vor, versuche es zu begründen – und liefere erste Ergebnisse eines Versuches, es in zehn Kärntner Grundschulklassen in die Praxis umzusetzen.

Gergely Wintsche, Budapest: The fundamental principles and the feedbacks of the new textbooks

I plan to give a summary about the development of the new textbooks in Hungary with special focus on the mathematics textbooks. I show how

we applied theoretical principles and turned them into practice when creating the new textbooks. I bring examples of good practices for text based problems to improve literacy competency. The first feedbacks from teachers confirm that we are on the right path and we shall improve by including more ready to use problems.

Katalin Fried, Budapest: Solving elementary mathematical problems – with didactical background

Solving problems plays an important role in teaching mathematics. We have to select the problems very carefully to achieve the aims we would like to. Not only the problems but the order we pose them has an effect on what and how the pupils perceive knowledge they have and acquire new knowledge. In the presentation we are going to examine some problems and their solutions on different levels with methodological background.

Csaba Csapodi, Budapest: Evaluation of the final exams in mathematics in the last 10 years and presenting the changes from 2017

Since 2005 (when the new system of secondary school graduation was set up) there was no general analysis of the final exams in mathematics. In the last two years several researches (supervised by the Educational Authority in Hungary) aimed to recover this deficiency. In the first part of my presentation I will show the most important findings of these researches. In the second part I will present the changes and their reasons concerning the specifications and the curriculum of the final exams in mathematics. The changes were effected partly by the researches mentioned above, partly by the changes occurred in the National Curriculum of mathematics.

Balázs Koren, Budapest: Smartphones und der Mathematikunterricht

In 2015 sitzen die meisten Schüler mit ihren Smartphones oder Tablets auf der Schulbank. Diese Telefone sind nicht mehr die Geräte, die nur telefonieren und SMS schreiben können. Diese „gadgets“ sind im Unterricht verwendbar. Wie können wir die Smartphones im Mathematikunterricht benutzen? Es gibt eine enorme Auswahl von Applikationen, aber leider ist nur eine kleine Minderheit davon in der Schule oder zu Hause benutzbar.

Samstag, den 03. Oktober

Susanne Schnepel, Zürich: Ein Konzept für den inklusiven Mathematikunterricht unter Berücksichtigung der Förderung von Kindern mit einer geistigen Behinderung

Vorgestellt wird ein Konzept für den Mathematikunterricht in inklusiven Klassen (2. und 3. Schuljahr), in denen Kinder mit einer geistigen Behinderung unterrichtet werden. Dieses wurde in der Schweizer Unterrichtsstudie „Sirius: Soutenir l'intégration – Integration unterstützen“ entwickelt. Im Vortrag werden der Forschungsstand zum Mathematiklernen von Kindern mit geistiger Behinderung und ein Modell zur Zahlbegriffsentwicklung präsentiert. Davon ausgehend wird ein Konzept für die mathematische Förderung von Kindern mit einer geistigen Behinderung im inklusiven Mathematikunterricht vorgestellt. Dieses beinhaltet Vorschläge für gemeinsame Lernsituationen an einem Thema mit allen Schülerinnen und Schülern sowie Differenzierungsmaßnahmen für sehr unterschiedliche Lernniveaus. Abschließend wird ein Einblick in die Unterlagen für die Lehrkräfte und die Materialien für die Kinder gegeben.

Emese Vargyas, Mainz: Entdeckendes Lernen am Beispiel von Wurzel 3

Im Vortrag werden drei Beweise mittels Wechselwegnahme für die Irrationalität von Wurzel 3 präsentiert, anhand derer eine Brücke zwischen Algebra und Geometrie geschlagen wird. Anschließend wird – analog zur Verdoppelung eines Quadrates – auf die Verdreifachung bestimmter geometrischer Figuren eingegangen.

Zsuzsa Somfai, Budapest: Didaktik oder/und Psychologie

Manchmal kommt es vor, dass die Studierenden nicht gerne lernen oder eigentlich nicht lernen wollen. Besonders langweilig für sie ist, das Üben wichtiger algorithmischer Aufgaben. Ich möchte mit einer Reihe von Übungen zeigen, wie man solche Studierende motivieren kann, sowie Möglichkeiten für eine Binnendifferenzierung vorstellen.

Éva Vásárhelyi, Budapest: Lehrerbildung in Ungarn

Man kann über die laufende Umstrukturierung des Bildungssystems mindestens so viele Beschwerden wie Zufriedenheit hören. Die Lehrerbildung gehört zu den wenigen Gewinnern. Wir berichten über unsere Absichten und positive Phänomene.

Erovin Deák, Budapest: Information über unkonventionelle Richtungen in der geplanten mathematikdidaktischen PhD-Ausbildung an der Universität ELTE und über den Hintergrund in der Lehrerausbildung

Es handelt sich um einen neuartigen mathematikhistorischen Kurs (als Pflichtfach, zwei Semester), der aufgrund unkonventioneller Prinzipien – über

die Rolle der Mathematikgeschichte (im Mathematikunterricht, in der mathematikdidaktischen Forschung, in der Mathematiklehrausbildung), über die genetische Richtung im Unterricht, über die mögliche Rolle fundamentaler Ideen – konzipiert ist. Einige dieser Prinzipien werden kurz erklärt. An diesen Kurs schließen sich mehrere (frei wählbare) Kurse über die Umsetzung dieser Prinzipien und dieser Erkenntnisse im Mathematikunterricht an. Als Vorbild dienen Kurse, die ich an der Universität ELTE seit langem regelmäßig abhalte: Die mathematikdidaktischen Kurse mit solchen verschiedenen Einzelthemen seit 26 Jahren und der mathematikhistorische Kurs (als Pflichtfach in der Master-Ausbildung der Lehrerstudenten) seit 8 Jahren.

Gabriella Ambrus, Budapest: Komplexer Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert?

Vor mehr als fünfzig Jahren begann der „Komplexer Mathematikunterricht“-Versuch von Tamás Varga, der in 1978 zu der Einführung eines völlig neuen Lehrplanes für Mathematik in den Klassen 1–8 führte. Obwohl der Mathematikunterricht seitdem durch die Ideen von T. Varga und seiner Mitarbeiter stark geprägt ist, wurde die Methode für die weiteren Klassen (9–12) nur teilweise adaptiert. Das Ziel unseres Projektes ist – am Beispiel des Unterrichtes der Kombinatorik – die Analyse und Aufarbeitung von früheren Ergebnissen sowie die Ergänzung um neue relevante Konzeptionen. Außerdem wird die Methode von T. Varga auf die Klassen 9–12 ausgedehnt. Im Vortrag wird über unsere Arbeit und die Ergebnisse kurz berichtet.

Nach den einzelnen Vorträgen gab es die Möglichkeit, die Themen weiter zu diskutieren.

Im Anschluss an die Vorträge fand eine Sitzung zum Thema „Administratives und Organisatorisches“ statt. Frau Gabriella Ambrus (ELTE Budapest) wurde dabei zur Sprecherin des Arbeitskreises gewählt.

Zu den ursprünglichen Zielsetzungen des Arbeitskreises wurden noch folgende Vorschläge gemacht:

- Förderung der Internationalität und Interkulturalität
- Vergleich von vergangenen Entwicklungen und Tendenzen im Bildungswesen der verschiedenen Länder (Matura, Abitur). Was kann man daraus lernen bzw. übernehmen?
- Verstärkung der Beziehungen und der wechselseitigen Zusammenarbeit in der Lehrerausbildung
- Stärkere Beachtung des Grundschulbereichs
- Einbeziehen von Kollegen aus ganz Ungarn (nicht nur aus Budapest) in die Zusammenarbeit

- Empfehlungen zu weiteren Publikationsmöglichkeiten sind willkommen

Es ist geplant, eine Homepage des Arbeitskreises (durch Balázs Koren) zu gestalten, einen Tagungsband mit den Vorträgen der ersten Tagung herauszugeben sowie einen kurzen Bericht der Tagung vom 2.–3. Oktober 2015 an die Ungarische Akademie der Wissenschaften zu senden.

Die Teilnehmer hatten am Freitagabend ein gemeinsames Abendessen in einem Restaurant am Donauufer, in der Nähe der Universität. Am Samstagnachmittag konnten einige Kollegen dank des schönen Wetters kleinere Ausflüge in der Gegend machen.

Die nächste Sitzung findet im März 2016 bei der GDM-Jahrestagung in Heidelberg statt. Hier soll näher auf die Ziele und Tätigkeiten des Arbeitskreises Ungarn eingegangen werden.

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität, Pázmány P. sétány 1/c, 1117 Budapest, Ungarn
Email: ambrusg@cs.elte.hu

Einladung zur 50. Jahrestagung der GDM 2016 in Heidelberg

Guido Pinkernell

Dieses Jahr findet vom 7. bis zum 11. März 2016 die 50. Jahrestagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik statt. Zu diesem Jubiläum laden wir Sie gerne an die Pädagogische Hochschule im schönen Heidelberg ein. Nehmen Sie die Tagung wieder einmal als eine besondere Gelegenheit wahr, sich mit Fachkolleginnen und -kollegen zu treffen und sich über aktuelle Aktivitäten in mathematikdidaktischer Forschung und Praxis zu informieren. Zahlreiche Beiträge in Form von Einzel- und Sektionsvorträgen, Poster und Workshops zeigen, was derzeit nicht nur in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik und -praxis geforscht und erprobt wird.

Wie in jedem Jahr werden auch in Heidelberg am Dienstag, dem Lehrertag, gesonderte Angebote für Lehrerinnen und Lehrer bereitgehalten. Die an diesem Tag stattfindenden Vorträge und Workshops haben einen besonderen Bezug zur Praxis, die für die an den Schulen tätigen Kolleginnen und Kollegen von besonderem Interesse sein dürften. Die Themen reichen vom kompetenzorientiertem Lernen mit konkreten Arbeitsmitteln bis hin zum Einsatz digitaler Werkzeuge in der Primarstufe- und den Sekundarstufen.

Ebenfalls am Dienstag findet parallel zum Lehrertag der sogenannte Work-In-Progress-Tag (WIP-Tag) statt. Ähnlich wie am traditionellen Nachwuchstag haben hier solche Beiträge ihren Platz, die über neue Projekte berichten, die noch am Beginn stehen. Die Zeit für die WIP-Beiträge wird so bemessen, dass neben der Projektvorstellung genügend Raum für und die gemeinsame Diskussion verbleibt. Hiervon sollen nicht nur der wissenschaftliche Nachwuchs, sondern auch etablierte Forscherinnen und Forscher profitieren, wenn sie ihre „WIPs“ in der scientific community diskutieren können. Das alles funktioniert natürlich nur dann, wenn genügend Fachexpertise zusammen kommt. Daher sind insbesondere die mit den WIP-Themen vertrauten Kolleginnen und Kollegen aufgerufen, an diesem Tag die Vorträge zu besuchen. Ebenso wird an diesem Tag die Posterausstellung und -bewertung stattfinden. Die drei besten Poster werden während des Gesellschaftsabends prämiert, der am Mittwoch stattfinden wird.

Jeden Tag dürfen wir außerdem eine Hauptvortragende bzw. einen Hauptvortragenden begrüßen. Am Montag spricht Ass. Prof. Dr. Gabriella Ambrus (Eötvös-Loránd-Universität Buda-

pest) über die traditionsreiche ungarische Mathematikdidaktik und ihre Beziehungen zur deutschsprachigen Mathematikdidaktik. Am Dienstag diskutiert Prof. Dr. Michael Gaidoschik (Universität Klagenfurt) Möglichkeiten und Grenzen der Mathematikdidaktik bei der Bewältigung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht. Am Mittwoch begrüßen wir StD Henning Körner (Studienseminar Oldenburg), der mit dem Übergang vom Lehramtsstudium zum Referendariat eine von Felix Klein schon früh problematisierte Schnittstelle in den Blick nimmt. Am Donnerstag wird Prof. Dr. Jürg Kramer (Humboldt Universität zu Berlin) Einblicke in die Hochschulmathematik geben, ausgehend von einem auch in der Schule wohlbekannten Sachverhalt: dem Satz von Pythagoras. Am Freitag schließlich ist eine weitere Schnittstelle, nämlich zwischen schulischer und beruflicher Ausbildung Gegenstand des Vortrages von Prof. Dr. Kathrin Winter (Europa-Universität Flensburg), wenn Möglichkeiten der Unterstützung im Bereich der Mathematik zu Beginn von Studium, Ausbildung und Beruf vorgestellt werden.

Genauere Informationen finden Sie auf der Tagungswebsite www.gdm-tagung.de.

Auch der Nachwuchs ist dieses Jahr wieder aktiv. Das reichliche Angebot, angefangen beim Nachwuchstag am Sonntag und Montag vor der Tagung, dem Kneipenabend am Dienstag, über Talkrunden und Experten- und Expertinnen-Sprechstunden bis hin zu PostDoc-Workshops, findet im Laufe der Woche statt.

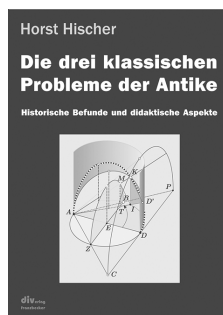
Heidelberg ist eine alte Universitätsstadt. Die Stadtkultur ist nicht zuletzt durch das akademische Leben geprägt. Die Ausflüge am Mittwochnachmittag führen Sie durch die Stadt und die malerische Umgebung. Nehmen Sie sich die Zeit, in den vielen kleinen Gassen der Altstadt den besonderen Flair Heidelbergs zu erleben.

Die Pädagogische Hochschule Heidelberg freut sich, Sie zur Jahrestagung 2016 in Heidelberg begrüßen zu dürfen!

Guido Pinkernell, Pädagogische Hochschule Heidelberg, Institut für Mathematik und Informatik, Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
Email: pinkernell@ph-heidelberg.de

Horst Hischer: Die drei klassischen Probleme der Antike

Rezensiert von Thomas Jahnke



Es beginnt mit dem Umschlag: Vorn unter dem Titel, der mit ‚klassisch‘ und ‚Antike‘ irgendwie doppelt daherkommt, gleich eine undurchsichtige Zeichnung, erstellt mit einem Geometrieprogramm, das offensichtlich viele Pastellfarben und Linienformen zur Verfügung stellt, hinten

ein Text in drei Schriftgrößen mit einer Randbreite < 5 mm, als sei ein jüher Papiermangel ausgebrochen. Beim Aufschlagen fällt dann ein kleiner Zettel mit neun Errata heraus und, als wär's ein Bastelbogen, das Blatt „12 Register, S. 97–98“ zum Austauschen. Die gefühlte Papierknappheit setzt sich durch das ganze Buch fort; nirgends hat das Auge Raum, der Satz ist durchgehend eng, die eingefügten Bilder und Zeichnungen meist zu klein, dass man schon fast haltlos erschrickt, wenn man auf die leere Seite 18 stößt.

Das Inhaltsverzeichnis weist dann hauptsächlich *Lösungswerkzeuge* und *Lösungswege* zu der *Dreiteilung eines Winkels*, der *Verdoppelung des Würfels* und der *Quadratur des Kreises* aus, die mit umfassenden historischen Kenntnissen detailliert dargestellt werden. Der Hauptteil des Büchleins befasst sich also mit der *Behandlung der drei klassischen Probleme innerhalb dreier Jahrhunderte der griechischen Antike* (500–200 v. Chr.) und deren Rezeption und Weiterentwicklung in den folgenden Jahrhunderten. Diese sorgfältige, detaillierte, historische Quellenarbeit ist bewundernswert und wird sicher die Anerkennung derer finden, die auf diesem Gebiet arbeiten und forschen. Aber der historische Blick geht nicht über den genannten Zeitraum hinaus, sondern verweigert sich nahezu der weiteren Entwicklung. Erst im 4. Abschnitt, der *19. Jahrhundert: die endgültige Lösung der drei klassischen Probleme* betitelt ist, von Kapitel 7 *Ergänzungen* (sic!) erfolgt kommentarlos ein jüher Zeitsprung zu den algebraischen Lösungen. Zu Recht rügt Hischer in seinem Vorwort die übliche Behandlung der drei Probleme

Im Mathematikstudium werden sie – wenn überhaupt – meist nur marginal in Vorlesungen erwähnt, und allenfalls werden sie dann

mit wenigen Beweiszeilen als nicht lösbar vorgestellt.

und folgt dann in seinem Büchlein eben dieser Praxis, wenn er deren Unlösbarkeit in kürzester Form auf kaum mehr als einer (!) Seite nach einem Hinweis auf die algebraische *Theorie der Körpererweiterungen* ohne jegliche Erläuterung andeutet. (Wie sich solche Wortkargheit oder Verschwiegenheit auf die Gruppierung der Trisektierer auswirkt, sei dahin gestellt; hier geht es ja um *historische Befunde* und *didaktische Aspekte*.)

Leider hat der Autor nicht die von F. Tägert ausgearbeiteten „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ von Felix Klein zu Rate gezogen. In der Einleitung zu dieser „Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts“ [1] bemerkt Klein, der sich an das gleiche oder ein ähnliches Auditorium wie Hischer wendet:

Die schärferen Begriffsbestimmungen und Beweismethoden, welche die moderne Mathematik entwickelt hat, gelten in den Kreisen der Gymnasiallehrer vielfach als abstrus und übertrieben exakt und werden dementsprechend gern so angesehen, als seien sie nur für den engeren Kreis der Spezialisten von Bedeutung. Demgegenüber hat es mir Vergnügen gemacht im vergangenen Sommer vor einer grösseren Zahl von Zuhörern in einer zweistündigen Vorlesung darzulegen, was die neuere Wissenschaft über die Möglichkeit der elementargeometrischen Constructionen zu sagen weiss.

In der Einleitung (S. 1) kommt Klein dann auf sein Thema in klaren Worten zu sprechen:

„Es sollen im Folgenden die geometrischen Constructionen behandelt werden, und zwar soll weniger nach der Auflösung im einzelnen Fall, als vielmehr nach der *Möglichkeit* resp. *Unmöglichkeit*, eine Lösung zu finden, gefragt werden.“

Drei Probleme, die bereits im Altertume untersucht wurden, werden dabei im Vordergrund des Interesses stehen. Es sind

- 1) das Problem der Verdoppelung des Würfels (auch das *Delische* Problem genannt),

- 2) die Drittteilung eines beliebigen Winkels,
- 3) die Quadratur des Kreises d. h. die Construction von π .

Bei allen diesen Aufgaben haben die Alten vergebens eine Lösung mit Zirkel und Lineal gesucht, und eben darin lag die Berühmtheit derselben, dass zu ihrer Bewältigung höhere Hilfsmittel nötig schienen. Wir werden in der Tath beweisen, dass eine Auflösung durch Zirkel und Lineal unmöglich ist. Was den Nachweis ad 3) angeht, so handelt es sich dabei bekanntlich um einen ganz modernen Fortschritt. Die Entwicklungen ad 1) und 2) sind implicite in den allgemeineren Betrachtungen der Galois'schen Theorie enthalten, wie man sie heute in den Lehrbüchern der höheren Algebra findet. Dagegen fehlt auch bei diesen Problemen eine explicite Darstellung in elementarer Form (...).

Aus meiner Sicht hätte eine Schrift, die die drei genannten klassischen Probleme behandelt, eben auch das zu leisten, was Klein hier ankündigt, allerdings nach Möglichkeit so, dass der der Schulmathematik kundige Anfänger hier einen Zugang finden kann. Es ginge dabei nicht um *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*, wie es vielleicht Klein seiner Zeit erschien, sondern um *höhere Mathematik vom elementaren Standpunkte*. Wenn man sich überhaupt dieser klassischen Perlen zum Beispiel in *mathematischen Proseminaren des Mathematikstudiums zur Bildung einer fachlichen Grundlage für eine mögliche Grundlage im Mathematikunterricht* (so schlägt der Klappentext vor) annimmt, dann kann es nicht allein darum gehen, die griechische Mathematik vorchristlicher Jahrhunderte aufleben zu lassen, sondern entscheidend auch darum, wie und aus welcher Entwicklung und mit welchen Ergebnissen die moderne Mathematik sie bearbeitet hat. Dabei könnte man sich einerseits an den genannten Vorträgen von Klein orientieren und andererseits an den mathematikphilosophischen Überlegungen von Friedrich Waismann, der ca. 1938 die *Dreiteilung des Winkels* paradigmatisch für das „Suchen und Finden in der Mathematik“ in einem ebenso betitelten Artikel [2] diskutiert. Frei nach Waismann könnte man sagen, dass der Beweis nicht zeigt, dass man einen Winkel mit Zirkel und Lineal nicht dreiteilen kann, er zeigt vielmehr, dass die Suche nach einer derartigen Konstruktion sinnlos ist.

Im Kapitel 8 *Zur Bildungsbedeutsamkeit dieser klassischen Probleme* begegnen wir schließlich neben dem romantischen Abstaubzitat von Toeplitz solchen von Israel Alexander Wittenberg, die wohl unser Herz wärmen und auch des fortgesetzten

Abdrucks wert sind. Wenn es dann bei Hischer auf Seite 68 unten heißt

Solche unterschiedlichen Sichtweisen von „Geometrien“ können (und sollten) auch ein *Bildungsziel gymnasialen Mathematikunterrichts* werden!

dann könnte man boshaft fragen, auf welche realen Schulen das kursiv gesetzten Attribut Bezug nimmt: Geht es bei dieser Feststellung und Forderung um spezielle Gymnasien oder auch um die Gesamtschulen in Nordrhein-Westfalen und die Stadtteilschulen in Hamburg?

Nachschrift

Die schlimmsten Rezensenten sind vielleicht die enttäuschten. Was hat diese Enttäuschung bei mir verursacht? Eine Kleinigkeit: es fehlt im Titel des Büchleins nur ein Wort mit zwei Buchstaben, nämlich ‚in‘. Lautete dieser statt *Die drei klassischen Probleme der Antike* passender *Die drei klassischen Probleme in der Antike*, dann wäre ich vielleicht nicht so enttäuscht gewesen, sondern hätte das Büchlein gar nicht erst zur Hand genommen.

Horst Hischer: *Die drei klassischen Probleme der Antike. Historische Befunde und didaktische Aspekte*. Verlag Franzbecker. Hildesheim 2015. 98 Seiten.

Literatur

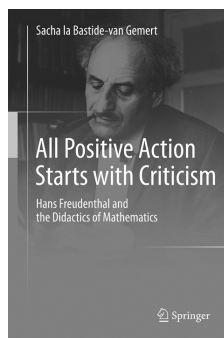
- [1] F. Klein: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Teubner Verlag, Leipzig 1895
- [2] F. Waismann: Suchen und Finden in der Mathematik. In: Enzensberger, H.M.: Kursbuch 8. Suhrkamp Verlag, Frankfurt 1967. S. 74–92

Thomas Jahnke, Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Campus II – Golm, Haus 9, Karl-Liebknecht-Straße 24–25, 14476 Potsdam
Email: jahnke@uni-potsdam.de

Editorischer Hinweis: Der Rezensent hat die Rezension vorab auch dem Autor zugesandt. Der Autor hat auf eine Replik im aktuellen Heft verzichtet.

Sasha la-Bastide-van Gemert: All Positive Action Starts with Criticism: Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics

Rezensiert von David Kollosche



Die Beschäftigung mit dem Leben und Werk von Hans Freudenthal ist aus mehreren Gründen spannend. Ergreifend ist zunächst der Lebenslauf von Hans Freudenthal, der 1905 als Sohn jüdischer Eltern in Luckenwalde bei Berlin geboren loszieht, um Mathematik in Berlin zu studieren, von

Luitzen E. J. Brouwer als vielversprechendes Nachwuchstalent nach Amsterdam geholt wird, während der deutschen Besatzung aus dem Hochschuldienst entlassen wird, der Deportation nur dank seiner Ehe mit einer Niederländerin entgeht, sich in den letzten Kriegsjahren daheim bei der Erziehung seiner Kinder für die Didaktik der Mathematik zu interessieren beginnt, an der Universität in Amsterdam aber nach dem Krieg nie angemessen rehabilitiert wird. Mathematikdidaktisch interessant ist dann, wie Freudenthal in Amsterdam nicht nur seinen Ruf als angesehener Mathematiker festigt, sondern didaktisch aktiv wird, die Debatte um eine Modernisierung des Mathematikunterrichts in den Niederlanden begleitet, seine Ideen auf internationaler Bühne präsentiert und dort schließlich zu einer Führungspersönlichkeit aufsteigt, die in zentraler Rolle zur Verwissenschaftlichung, Institutionalisierung und Internationalisierung der Mathematikdidaktik beigetragen hat.

Mit seiner Dissertationsschrift *Elke positieve actie begint met critiek: Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde* legte Sasha la Bastide-van Gemert 2006 eine Untersuchung des Lebenswerks Freudenthals vor,¹ welches 2015 in einer durch die ICMI geförderten und sprachlich zugänglichen, wenn auch zuweilen etwas holprigen, englischen Übersetzung von Marianne Vincken und William Third erschien. Im Fokus dieser Studie stehen dabei die folgenden Fragen:

What was Freudenthal's role in mathematics education? How correct is the view of the key role that he played in the innovations? [...]

What were his ideas about mathematics, education and didactics? How did these ideas originate, by what were they influenced and how did they change (if they did)? In what way did they have an influence, and what influence did they have, on the prevailing views at that time? (S. 3)

Nach einer historischen Beschreibung der Situation des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik in den Niederlanden zwischen den Weltkriegen und einem kurzen biographischen Abriss beleuchtet la Bastide-van Gemert mehrere Etappen des Schaffens Freudenthals, vor allem seine in einem unveröffentlichten Buchfragment überlieferten Beschäftigungen mit der Rechen-didaktik, seine Etablierung in mathematikdidaktischen Kreisen nach dem Zweiten Weltkrieg, seinen Aufstieg zu einer Führungspersönlichkeit im Forschungsfeld, seine Rezeption der Stufentheorie der van Hiele, seine Auseinandersetzung mit der Neuen Mathematik und sein Spätwerk. Anstatt die von la Bastide-van Gemert vorgelegte Zusammenfassung und Einordnung der Beiträge Freudenthals in dieser Rezension abermals zu resümieren, möchte ich im Folgenden versuchen, den mir bei der Lektüre gewahr gewordenen Einfluss Freudenthals auf die Mathematikdidaktik nachzuzeichnen und so das Interesse an einer tiefgreifenden Beschäftigung mit dem vorgelegten Buch zu wecken.

Zur Mathematikdidaktik als Wissenschaft

Als Freudenthal in den Wirren des Zweiten Weltkrieges beginnt, sich mathematikdidaktischen Fragen zuzuwenden, folgt der Mathematikunterricht in den Niederlanden noch einem von Darbietung und Übung beherrschten Unterrichtskonzept, welches in den Volksschulen an kalkülgeleitetem Drill und in den höheren Schulen logisch-deduktiv orientiert ist. Motiviert durch das Rechnenlernen seiner Kinder beginnt Freudenthal mit der Lektüre von 270 Quellen zur Rechen-didaktik, wovon

¹ Die niederländische Dissertationsschrift ist abrufbar unter <http://www.rug.nl/research/portal/files/14570498/thesis.pdf>.

ein umfangreiches, überliefertes Notizbuch Zeugnis ablegt, und mit dem Verfassen eines eigenen Werkes, welches jedoch nie über Vorbetrachtungen hinausgeht und unveröffentlicht bleibt. Gleichwohl sehen sowohl Freudenthal als auch la Bastide-van Gemert viele didaktische Grundpositionen Freudenthals bereits in diesem Manuskript angelegt, weshalb man la Bastide-van Gemert nur dafür danken kann, dass dieses unbekannte Frühwerk aus den Archiven geholt und der interessierten Öffentlichkeit vorgestellt wurde.

Ein dominantes Thema in Freudenthals Rechendidaktik ist die Frage nach der Nützlichkeit von Hilfswissenschaften für die Beantwortung von Fragen im Bereich des Rechnenlernens. Freudenthal legt differenziert dar, warum er in der Philosophie, Psychologie, allgemeinen Didaktik und Methodologie der Zeit kaum Anregungen erkennen kann, die dazu beitragen können, Fragen zur unterrichtlichen Gestaltung eines Lehrgangs im Rechnen zu beantworten. Den populären Autoren seiner Zeit, unter anderem Johannes Kühnel, wirft er vor, philosophische und psychologische Theorien nur als oberflächliches Alibi zur Legitimation des eigenen Denkens anzuführen, ohne dabei die herangezogenen Theorien gründlich zu durchdenken und auf das Rechnenlernen zu beziehen. Diese Kritik kehrt bei Freudenthal später wieder, wenn er sich gegen die Legitimation der Neuen Mathematik durch die Entwicklungspsychologie von Piaget und Bruner wendet. Inspiriert durch die Pädagogik von Dalton, Montessori und Fröbel sowie durch neue und seinerzeit noch unbeachtete Entwicklungen in der Lernpsychologie aus den USA fordert Freudenthal bereits in seiner Rechendidaktik eine methodische Umorientierung der Forschung zum Mathematiklernen, welche ihre Theorien nicht als theoretische Wissenschaft oberflächlich von den Schutzheiligen der Bezugsdisziplinen ableiten, sondern als empirische Wissenschaft aus Beobachtungen gewinnen soll.

La Bastide-van Gemert arbeitet heraus, wie vor allem die Arbeit des Ehepaars van Hiele zu Stufen geometrischer Einsicht die Ansichten Freudenthals beeinflusst hatte. Durch die Erkenntnisse der van Hieles wurden Lücken im Verstehen mathematischer Inhalte erstmal mathematikdidaktisch beschreibbar. Freudenthal führt diese Stufentheorie in der Folge häufig an, um axiomatisch vorgehende und die geistige Entwicklung der Schüler ignorierende Unterrichtskonzepte zurückzuweisen und eine psychologisch orientierte Konzeption von Mathematikunterricht zu fordern. Auf dem Fundament dieses Denkens arbeitet Freudenthal seine Konzepte der ‚Nacherfindung unter Führung‘ und der ‚anti-didaktischen Inversion‘ aus. Die Promotionen der van Hieles bereiteten darüber hinaus

den Weg für die weitere Entwicklung der Mathematikdidaktik als eigenständige Wissenschaft: Die van Hieles waren 1957 nicht nur die ersten, die ihre Promotion zu einem mathematikdidaktischen Thema abschlossen, sondern gingen in ihren Untersuchungen zu Stufen geometrischer Einsicht empirisch vor, legitimierten diese also vor allem an Beobachtungen des Geometrielernens von Schülern. Damit war Freudenthals Forderung nach einer auf Empirie aufbauenden und wissenschaftlich selbständigen Mathematikdidaktik erstmals in einem Forschungsprojekt umgesetzt.

Zum Bildungswert von Mathematik

Ein anderes dominantes Thema, welches Freudenthal in seiner Rechendidaktik erstmals aufgreift, ist das des Bildungswerts der Mathematik. Seit dem 19. Jahrhundert wurde dem Mathematikunterricht in den Niederlanden vornehmlich ein formaler Bildungswert zugesprochen, und wenngleich diese Zuschreibung bereits mehrfach kritisiert wurde, war die Idee, dass man im Mathematikunterricht vor allem denken lerne, auch nach dem Zweiten Weltkrieg noch vorherrschend. Im Zuge seiner Rechendidaktik stellt sich Freudenthal dieser Idee vehement entgegen und argumentiert, dass einerseits völlig unklar sei, inwiefern man im Zuge des Rechnenlernens auch über das Rechnen hinaus denken lerne, etwa ein vielbeschworenes logisches Denken, und dass andererseits logisches Denken nur in sehr formalisierten Diskursen eine Anwendung finden könne und als Hilfe bei der Bewältigung der meisten privaten und beruflichen Probleme überschätzt werde. Gleichwohl glaubt Freudenthal durchaus, dass man in der Schule denken lernen könne, nur erachtet er andere Schulfächer wie den Unterricht in der Muttersprache dafür als geeigneter. Diese Sichtweise baut er nach dem Zweiten Weltkrieg in Vorträgen aus, stellt die der Idee der formalen Bildung zugrundeliegende Transferhypothese generell in Frage. Welcher Bildungswert kommt also dem Rechnen zu? Freudenthal sieht diesen einzig und allein in der alltäglichen Brauchbarkeit des Rechnens, weshalb jeder Rechenunterricht schließlich sicherzustellen habe, dass nicht nur korrekt gerechnet, sondern das Rechnen sinnvoll angewandt werden kann. Für Anwendungssituationen reiche es dabei nicht aus, dass sie irgendwo in der Praxis vorkommen; sie sollten stattdessen zur ‚Interessensphäre des Kindes‘ gehören.

Im Jahre 1951 wendet Freudenthal seine Ideen auch auf den Geometrieunterricht in höheren Schulen an und fordert dort eine Abkehr vom axiomatisch organisierten Lehrgang und eine Zuwendung zu einem intuitiven Herantreten an geometrische Fragestellungen. Im Vordergrund ste-

hen dabei wieder Freudenthals Skepsis gegenüber dem formalbildenden Charakter, der gerade der Geometrie traditionell zugeschrieben wurde, und sein Vorhaben, Mathematikunterricht vom Kinde aus zu denken. Den Bildungswert des euklidischen Lehrgangs in Geometrie sah Freudenthal schließlich im individuellen Erleben der Potenz des eigenen Denkens. Er vertrat dabei wie viele Kollegen seiner Zeit die Ansicht, dass eine intuitive Beschäftigung mit Geometrie früher oder später notwendig ein individuelles Bedürfnis nach logischer Rechtfertigung und Axiomatisierung hervorbringt.

Im Jahre 1947 trat Freudenthal einer Arbeitsgruppe zur Reform des Mathematikunterrichts bei und übernahm dort schnell eine führende Rolle. Diese Arbeitsgruppe erarbeitete schließlich ein Curriculum, in der Freudenthals bildungstheoretischen Überlegungen ihren Niederschlag fanden. Dieses Curriculum rückte nun nicht der den formalbildenden Charakter der Mathematik, sondern ihre Nützlichkeit in den Fokus und passte die Stoffauswahl entsprechend an. Das Curriculum der Arbeitsgruppe wurde zwar nie umgesetzt, beeinflusste eine kurz darauf umgesetzte Überarbeitung des Curriculums aber nachhaltig. Auf diesem Wege erhielten die Niederlande einen Lehrplan, in dem der Anwendungsbezug der Mathematik und das Verstehen vom Kinde aus in den Mittelpunkt rückten, und dessen Fortschritte Freudenthal auf internationalen mathematikdidaktischen Konferenzen in die Welt trug.

Zur Institutionalisierung der Mathematikdidaktik

Im Zuge seiner Forderungen nach einer Umorientierung mathematikdidaktischer Forschung hin zu einer empirischen Wissenschaft kommt bei Freudenthal auch erstmal die Forderung nach einer Institutionalisierung der Mathematikdidaktik auf. Im Sinne einer möglichst distanzierten Beobachtung von Lernprozessen solle eben nicht der Lehrer, sondern ein professioneller Außenstehender entsprechende Forschung betreiben. Als solche Außenstehende kommen in den 40er und 50er Jahren jedoch nur die daran wenig interessierten Fachkollegen aus der Mathematik und die wenigen, mit vielen anderen Fragen beschäftigten Erziehungswissenschaftler in Frage. Die Institutionalisierung der Mathematikdidaktik an den Universitäten scheint also unvermeidlich. Dieses Ziel erreicht Freudenthal in den Niederlanden jedoch erst in den späten 60er Jahren mit der Gründung des später nach Freudenthal benannten Instituts.

Darüber hinaus trägt Freudenthal maßgeblich zum Aufbau der Mathematikdidaktik als eigenständiger Wissenschaft bei. Durch seine Distanzierung

von Bezugswissenschaften stellt Freudenthal klar, dass nicht zu erwarten ist, dass die Probleme des Mathematikunterrichts in der Pädagogik, Psychologie oder allgemeinen Didaktik gelöst werden können. Mit seiner Betreuung der ersten mathematikdidaktischen und zudem noch empirisch ausgerichteten Promotion in den Niederlanden von Pierre van Hiele trägt Freudenthal dazu bei, mathematikdidaktische Forschung wissenschaftlich zu legitimieren und ein Exempel in seinem Sinne zu statuieren. Schließlich trägt Freudenthal als Ausrichter internationaler Tagungen, als Mitbegründer der Fachzeitschrift *Educational Studies in Mathematics* und als Präsident der ICMI dazu bei, die Mathematikdidaktik international aufzustellen.

Würdigung und Kritik

Die große Leistung von la Bastide-van Gemert besteht darin, das Wirken Freudenthals an ausgewählten Themen und an Hand auch unveröffentlichter Quellen nachzuzeichnen und in den jeweiligen zeitlichen Kontext einzuordnen. Besonders die Diskussion der zahlreichen Quellen, die la Bastide-van Gemert im Archiv Freudenthals sichtet und auswertet, erlauben neue Einblicke in die Umstände und Beweggründe der Beiträge Freudenthals. Aus dieser Sicht kann die Lektüre von la Bastide-van Gemerts Werk für jeden Mathematikdidaktiker nur bereichernd sein.

Gleichwohl sei auch kritisch angemerkt, was wenigstens mir bei der Lektüre deutlich zu kurz kam. Zunächst reflektiert la Bastide-van Gemert seine eigene Rolle als Geschichtsschreiber nicht. Sein historiographisches Vorgehen gleicht einer Erzählung, die versucht, das im Archiv dokumentierte Denken Freudenthals in die Diskurse seiner Zeit einzuordnen, und ignoriert die kritische Rolle der Geschichtsschreibung als Produzent von Wahrheit. Im Kontext der Analyse des Lebenswerks Freudenthals und der Geschichte der Mathematikdidaktik wäre insbesondere zu fragen, welche Thesen hier aufgeworfen und an Hand der Analyse wie gestützt oder verworfen werden, welche alternative Interpretation des Geschehenden möglich ist, und welche Funktionen, beispielsweise für die Identitätsbildung der Mathematikdidaktik, bestimmte Erzählungen über das Lebenswerk Freudenthals im Gegensatz zu alternativen Deutungen haben. Dass im Buch fast nebenbei herausgearbeitet wird, dass Freudenthal zu seiner eigenen Mystifizierung beigetragen habe, reicht dazu nicht aus. Bezeichnend ist in diesem Kontext, dass la Bastide-van Gemert seiner historischen Studie keine Ausführungen über seinen geschichtswissenschaftlichen Ansatz voranstellt.

Zudem scheint es mir, als habe la Bastide-van Gemert seiner historischen Rekonstruktion eines tieferreichenden Potentials beraubt, indem er sich auf die bloße Nacherzählung und historische Einordnung der Ideen Freudenthals beschränkt. Dass die Ideen Freudenthals an keiner Stelle kritisiert, mit zeitgenössischen Positionen kontrastiert oder in ihrer Wirkungsgeschichte bis heute nachverfolgt werden, lässt das Lebenswerk Freudenthals in ihrer historischen Einsamkeit zurück, anstatt sie mit heutigen Entwicklungen in der Mathematikdidaktik zu verbinden. Womöglich ist dieser letzte Schritt aber auch eine zu hohe Erwartung im Rahmen einer Dissertation und vielmehr Aufruf

an den mathematikdidaktischen Leser, der Bedeutung der Ideen Freudenthals für die heutige Mathematikdidaktik nachzuspüren. Abschließend sei auch in diesem Sinne die Lektüre wärmstens empfohlen!

La Bastide-van Gemert, Sasha: *All Positive Actions Starts with Criticism. Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics*. Springer, Dordrecht 2015, 386 S., ISBN 978-94-017-9333-9, ca. € 130,00.

David Kolloosche, Grundschulpädagogik/Mathematik, Universität Potsdam, Karl-Liebknecht-Straße 24–25, 14476 Potsdam, Email: david.kolloosche@uni-potsdam.de

Felix Klein and Hans Freudenthal Awards 2015

Ferdinando Arzaello und Lena Koch

We take great pleasure in announcing that the ICMI Award Committee has decided on the ICMI Medallists for 2015. The recipients for 2015 of the Felix Klein and Hans Freudenthal Awards are:

- *Alan J. Bishop* (Monash University, Australia) – The Felix Klein Medal for lifetime achievement
- *Jill Adler* (University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa) – The Hans Freudenthal Medal for a major cumulative programme of research

Please join with us in congratulating both Alan and Jill, and acknowledging their fine contributions to mathematics education and therefore to the mathematics education community. We look forward to honouring them at ICME-13 in Hamburg in 2016.

The Felix Klein Medal for 2015 goes to Alan J. Bishop, Emeritus Professor of Education, Monash University, Australia

It is with great pleasure that the ICMI Awards Committee hereby announces that the Felix Klein Medal for 2015 is given to Alan J. Bishop, Emeritus Professor of Education, Monash University, Australia, in recognition of his more than forty-five years of sustained, consistent, and outstanding lifetime achievements in mathematics education research and scholarly development. Alan's



Alan J. Bishop
(© Alan J. Bishop)

early research on spatial abilities and visualization became transformed during a sabbatical leave in 1977 to Papua New Guinea where he began to think about the process of mathematical enculturation and how it is carried out in different countries. His subsequent book, *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*, published in 1988, was ground-breaking in that it developed a new conception of mathematics – the notion of mathematics as a cultural product and the cultural values that mathematics embodies. Further evolution of this notion occurred as a result of his co-organizing a special day-long event during the 1988 Sixth International Congress on Mathematical Education devoted to “Mathematics, Education, and Society”, and which eventually led to successive conferences on the political and social dimensions of mathematics education. Alan Bishop has been instrumental in bringing the political, social, and cultural dimensions of mathematics education to the attention of the field.

Alan Bishop has also contributed substantially to the field by means of the extensive editorial work he has done. In the late 1970s, Hans Freuden-

thal, who had been the founding editor of *Educational Studies in Mathematics*, tapped Alan to be the second editor. Alan began his editorship of the journal with Volume 10 in 1979, ending it with Volume 20 in 1989. In 1980, he founded and became the series editor of Kluwer's (now Springer's) *Mathematics Education Library*, which currently contains 63 volumes. He was the chief editor of the *International Handbook of Mathematics Education* (1996) and the *Second International Handbook of Mathematics Education* (2003), and he continued as an editor for the *Third International Handbook* (2013). Through his tireless and scholarly work in the area of publication, Alan Bishop has enabled research in mathematics education to become an established field.

The Hans Freudenthal Medal for 2015 goes to Jill Adler, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa



Jill Adler (© Jill Adler)

It is with great pleasure that the ICMI Awards Committee hereby announces that the Hans Freudenthal Medal for 2015 is given to Professor Jill Adler, FRF Chair of Mathematics Education, University of the Witwatersrand, South Africa, in recognition of her outstanding research program dedicated to improving the teaching and learning of mathematics in South Africa – from her 1990s ground-breaking, sociocultural research on the inherent dilemmas of teaching mathematics in multilingual classrooms through to her subsequent focus on problems related to mathematical knowledge for teaching and mathematics teacher professional development. Jill's research of multilingual classrooms during a period of change in South Africa puts into stark relief the tensions involved in teaching and learning mathematics in classrooms where the language of instruction is different from the language of teachers' and students' every-day lives. In her 2001 book, *Teaching Mathematics in Multilingual Classrooms*, she displays the strong theoretical grounding that has served to advance the field's understanding of the relationship between language and mathematics in the classroom. During the years from 1996 onward, Jill spearheaded several large-scale teacher development projects. The most recent one, begun in 2009, called the Wits Maths Con-

nect Secondary project, aims to further develop mathematics teaching practice at the secondary level so as to enable more learners from disadvantaged communities to qualify for the study of mathematics-related courses at university. This ongoing research and development project is a further testament to Jill's unstinting efforts to face head-on the challenges of improving mathematics teaching in post-apartheid South Africa – efforts that have been recognized by several awards over the years, including the University of the Witwatersrand Vice Chancellor's Research Award for 2003, the FRF Chair of Mathematics Education in 2009, the Gold Medal for Science in the Service of Society from the Academy of Science of South Africa in 2012, and the Svend Pedersen Lecture Award in Mathematics Education from Stockholm University in 2015. For the inspiring, persistent, and scholarly leadership that Jill Adler has provided to the field of mathematics education research and practice in South Africa and beyond, she is truly deserving of the Hans Freudenthal medal for 2015.

Information provided by Ferdinando Arzarello (President of ICMI) and Lena Koch, International Mathematical Union (Secretariat).

Nachruf auf Gerhard König

Stefan Deschauer



Gerhard König
(Foto: Privat)

Am 20. Oktober 2015 verstarb im Alter von 76 Jahren nach schwerer Krankheit Gerhard König. Wir trauern mit seiner Familie – seiner Frau Monika, seinem Sohn Markus (geb. 1979), seiner Tochter Marina (geb. 1980) – und seinen Freunden.

Gerhard König hat sich um das Gesamtunternehmen Mathematikdidaktik

in vielfältiger Weise verdient gemacht.

Er wurde am 21. Mai 1939 in Berlin geboren und begann ein Lehramtsstudium der Fächer Pädagogik, Mathematik und Physik an der Freien Universität. Mit dem Studienabschluss erwarb er den Grad eines Dipl.-Math. und arbeitete nach der 2. Staatsprüfung ab 1968 zuerst als Verlagsredakteur für Mathematik beim Ernst Klett Verlag in Stuttgart. Mit der vom Verlag unterstützten Gründung des Journals *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) im gleichen Jahr übernahm Gerhard König dessen verlegerische und editorische Betreuung. Mit dieser Tätigkeit wechselte er 1976 zunächst zur Zentralstelle für Atomkernenergie-Dokumentation (ZAED) und schließlich 1978 zum Fachinformationszentrum (FIZ) Karlsruhe (Leibniz-Institut für Informationsinfrastruktur). Hier widmete er sich unermüdlich der Internationalisierung und Digitalisierung des ZDM und dem Ausbau des Dokumentationsteils zu Datenbanken (MATHDI/MATHEDUC). Regelmäßig war er für ZDM auf wichtigen internationalen Konferenzen vertreten. Gerhard König trat 2004 als Abteilungsleiter für Didaktik der Mathematik in den verdienten Ruhestand.

Neben seinem Hauptamt hielt Gerhard König Mathematik-Vorlesungen an Karlsruher Hochschulen oder fungierte als ihr Betreuer.

Unter seinen Nebentätigkeiten spielten aber die Beiträge und Buchrezensionen in verschiedenen Zeitschriften für die Mathematikdidaktik eine besondere Rolle. Mit seiner bibliographischen Rundschau begleitete er die Zeitschrift *Stochastik in der Schule* von Anfang an (seit 1982).

Ich lernte Gerhard König in den Achtzigerjahren auf den GDM-Tagungen kennen. Als ich viele

Jahre später die Herausgeberschaft von MU übernahm, begann eine Zeit intensiver, vertrauensvoller Zusammenarbeit, die immerhin noch zwölf Jahre andauern sollte.

Gerhard König hat insgesamt 37 Jahre lang MU mit seiner Rubrik begleitet und bereichert, zunächst – ab Heft 1/1979 – unter der Bezeichnung „Zwispältiges“, dann – ab Heft 1/1984 – unter „kleingedrucktes“. Immer wieder gelang es ihm, passend zu den Hefthemen Bücher zu rezensieren sowie Hinweise zu aktuellen fachdidaktischen Diskussionen und auf nationale und internationale Fachtagungen zu geben. Hierzu verfügte er über ein Netzwerk, das seinesgleichen suchte. In der letzten Phase seiner Krankheit gelang es ihm noch, die Rubrik zum letzten Heft von 2015 fertigzustellen und mir über seine Tochter zu übermitteln. Darin bespricht er das Buch des russischstämmigen US-Mathematikers Edward Frenkel (geb. 1968): *Liebe und Mathematik: Im Herzen einer verborgenen Wirklichkeit* (Springer 2014). In der Rezension entwickelt sich Frenkels Liebeserklärung zur Mathematik zu Gerhard Königs eigener Liebeserklärung an das Fach, das sein Leben – neben dem Sport (Leichtathletik) – ganz wesentlich mitbestimmt hat.

Ich bin dankbar für die gemeinsame Zeit, in der ich mit Gerhard König arbeiten und von seiner reichen Erfahrung profitieren konnte. Seine ruhige, zurückhaltende, aber doch bestimmte Art bei der Argumentation und Meinungsbildung wird mir fehlen, aber auch das gemeinsame Feierabend-Bierchen im Hannoveraner Hauptbahnhof im Anschluss an die Herausgebersitzungen.

Stefan Deschauer, TU Dresden, Fachrichtung Mathematik, Professur Didaktik der Mathematik, 01062 Dresden
Email: stefan.deschauer@tu-dresden.de

Hinweise für Autor(inn)en

Zielgruppe/Inhalte

Die *Mitteilungen der GDM* werden halbjährlich an alle Mitglieder der GDM versandt. Redaktionsschluss ist jeweils der 15.5. und der 30.11. eines Jahres. Die Mitteilungen möchten über alles berichten, was einen deutlichen Bezug zur Mathematikdidaktik, zum Mathematikunterricht und zur Lehrer(innen)bildung im Fach Mathematik aufweist, insbesondere über alle Aktivitäten der GDM, ihrer Arbeitskreise und der von der GDM mitbestellten Kommissionen. Vor dem Schreiben eines freien Beitrags für die Mitteilungen (Rubriken: Magazin, Diskussion) wird empfohlen, zunächst mit dem Herausgeber abzuklären, in wie weit der geplante Beitrag für die Mitteilungen von Interesse ist.

Bilder/Illustrationen

Wir streben an, den Anteil schöner Illustrationen aller Art zu erhöhen. Alle Autoren sind dazu aufgefordert, sich hierzu Gedanken zu machen und möglichst qualitativ hochwertige Illustrationen mit ihrem Beitrag mitzuliefern (als Dateien oder Vorlagen zum Scannen) oder Vorschläge zu unterbreiten. Bei technischen Fragen oder Problemen steht Ihnen Christoph Eyrich (ceyrich@gmx.net) zur Verfügung.

Manuskripte/Umfang

Der Umfang eines Beitrags sollte zunächst mit dem Herausgeber abgestimmt werden. Er sollte in der Regel sechs Seiten (also zwölf Spalten) inklusive Illustrationen nicht überschreiten. In vielen Fällen darf/sollte es aber gerne auch kürzer sein. Beiträge sollten als weitestgehend unformatierte WORD- oder \LaTeX -Files eingereicht werden – sie werden von uns dann professionell gesetzt. Bei Manuskripten mit einem hohen Anteil mathematischer Formeln helfen Sie uns mit einer Einreichung als \LaTeX -File. Eine reine Textspalte in den Mitteilungen hat ca. 2 500 Anschläge (inklusive Leerzeichen).

Am Ende eines Beitrags drucken wir üblicherweise die Kontaktadresse des Autors (inkl. E-mailadresse) ab – *bitte geben Sie am Ende des Manuskripts selbst unbedingt Ihren Namen, Ihre postalische Kontaktadresse und Ihre E-mailadresse an.*

Einreichung/Kontakt

Bitte senden Sie Manuskripte (mit Ausnahme der Rubrik: Rezensionen) an den Herausgeber (schriftfuehrer@didaktik-der-mathematik.de). Wegen Rezensionen und Rezensionsanfragen wenden Sie sich bitte an Ulrich Kortenkamp (ulrich.kortenkamp@uni-potsdam.de) oder Thomas Jahnke (jahnke@math.uni-potsdam.de), Anfragen zu Anzeigen oder technischer Natur an Christoph Eyrich (ceyrich@gmx.net).

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

- **Vorstand.** 1. *Vorsitzender:* Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld. Tel. 0931 . 521106-5063, vomhofe@math.uni-bielefeld.de
- 2. *Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de
- *Kassenführer:* Prof. Dr. Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg.

Tel. 07141 . 140-385, Fax. 07141 . 140-435, bescherer@ph-ludwigsburg.de

■ *Schriftführer:* Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at

■ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.

■ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

■ Verleger: GDM ■ Herausgeber: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ■ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin ■ Umschlagentwurf: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns ■ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin
Der Bezugspreis der *GDM-Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.