erschienen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999, S.281-284, Hildesheim: Franzbecker

Christa KAUNE, Osnabrück

Förderung metakognitiver Aktivitäten durch geeignete Aufgabenstellungen

In den letzten Jahren trat in der didaktischen Diskussion verstärkt die Überlegung in den Vordergrund, Reflexion und Metakognition zu einem zentralen Bestandteil des Mathematikunterrichts zu machen (Schoenfeld, 1992). Während Boekaerts (1996) in ihrem Übersichtsreferat herausstellt, welche Rolle Metakognition für das selbstgesteuerte Lernen spielt, weist De Corte (1995) auf nur wenige Untersuchungen über erfolgreiche Ansätze bei der Berücksichtigung von Metakognition im *Mathematik*unterricht hin. Jedoch wird in diesen Untersuchungen eher über die Wirksamkeit eines gelegentlichen Einsatzes von Metakognition berichtet als daß ein durchgängiges Konzept dazu vorgelegt wird. Für den deutschsprachigen Raum sind aus den letzten zwanzig Jahren zwei Schulversuche (des Niedersächsischen Kultusministeriums) dokumentiert (Cohors-Fresenborg/Kaune, 1993), in denen das systematische Einüben von Reflexion und Metakognition wesentlich zur Verbesserung sowohl des Verstehens von Mathematik als auch zur Freude an der Mathematik beigetragen hat. Mit deren wissenschaftlicher Begleitung (1987-96) war unsere Arbeitsgruppe beauftragt. Einblicke darüber, wie Schüler mittels geeigneter Aufgabenstellungen zur Reflexion und Metakognition angehalten werden können, sind in diesem Band auch in den Beiträgen von Sjuts und Cohors-Fresenborg et al. dokumentiert. Die Entwicklung der Konzepte für die beiden Schulversuche war u.a. durch eine Wende von einer stoffdidaktischen zu einer kognitionstheoretischen Ausrichtung sowie einer besonderen Berücksichtigung von Metakognition gekennzeichnet. Dieses bezieht sich auch auf Fragen des Zustandekommens von mathematischen Begriffen im Wechselspiel zwischen mathematischen Ideen und ihrer Repräsentation.

Besonders bewährt für die Hinführung von Schülern (im 7. Schuljahr) zu metakognitiven Verhaltensweisen hat sich die Erarbeitung unterschiedlicher Repräsentationsformen für Algorithmen und die damit verbundene Erörterung des Wechselspiels zwischen internen Vorstellungen und externen Repräsentationen (vgl. Cohors-Fresenborg et al., 1995, S. 5-12).

In folgendem Sinne ergibt sich hier eine Verbindung von Kognition über metamathematische Probleme mit einer Metakognition über mathematisches Vorgehen: Vordergründig entwickelt der Schüler zunächst ein Programm für einen fiktiven Roboter. Kognitiv sind dabei Leistungen zu erbringen, die in der mathematischen Grundlagenforschung zur Analyse des Berechenbarkeitsbegriffs gehören. Analog erfinden Schüler zunächst in unterschiedlichen Repräsentationsformen Darstellungen für Algorithmen.

Dadurch, daß diese Repräsentationsformen „handgreifliches“ didaktisches Material sind, ist diese kognitive Anforderung verknüpft mit der Erfahrung von spielerischem Umgang mit mathematischen Ideen. Da verschiedene Schüler unterschiedliche Vorlieben für das Material haben und da wegen der bekannten Wechselwirkung zwischen äußeren Repräsentationsformen und dadurch aufgerufenen mentalen Modellen hierbei auch unterschiedliche Kognitionen im Spiel sind (Schwank, 1993), läßt es sich im Unterricht durch geeignete Aufgabenstellungen erreichen, daß aus dieser – in der Erfahrung der Schüler zunächst als Problemlöseaufgaben gestellten – Beschäftigung schrittweise eine Hinführung zu metakognitiven Aktivitäten geschieht. Dabei fällt es zunächst leichter, die Metakognition auf das Denken anderer zu beziehen, und sich erst danach Rechenschaft abzulegen über die eigene Kognition. Die Thematisierung von Fragen der Repräsentation als Gegenstand im Mathematikunterricht spielt hierbei eine zentralen Rolle.

In diesem Beitrag wollen wir zeigen, wie so vorbereitete Schüler der Jahrgangsstufe 9 mit einer klassisch erscheinenden Aufgabe (Cohors-Fresenborg et al., 1996, S. 97) angeregt werden können, auch über das Denken von Mitschülern zu reflektieren, um Fehl*vorstellungen* aufzudecken.

Aufgabe

Der Graph jeder Funktion, die nach dem Schema $p(a, b, c, x) = a(x-b)^2 + c$ mit $a \neq 0$ definiert wird, ist eine Parabel. Solch eine Parabel wird am Ursprung gespiegelt. Gib für die gespiegelte Parabel das zugehörige Funktionsschema an.

Transkript

Die Lösung von A. B. : $p_c(a, b, c, x) = -a(x+b)^2 - c$ steht an der Tafel.

Julia: Also, ich meine das auch. Und zwar, weil (.) erstmal, wenn das am Ursprung gespiegelt wird, dann muß die Öffnung unten sein und das hat er halt mit dem -a. (..) Weil, ähm (..) dann (.....) ... Ähm, das ist ja einmal an der (..) Argumentachse dann gespiegelt und dann müßte ähm -b, äh, +b hin, da das ja b dann im Minusbereich sein muß und dann muß auch -c hin, -c...? (..)

(Getuschel, Gelächter)

Julia: Ja klar. Ähm ja, das wird dann an der (...) Funktionswertachse gespiegelt und das muß auch im Minusbereich sein, also muß ein Minus dahin.

L.: Hmm...Christoph!

Christoph: Ja, Julias ist eigentlich fast richtig, bis auf, daß sie gesagt hat, daß es nach unten geöffnet ist. Ich würde eher sagen andersrum als sie...

L.: Kannst du erklären, warum das ein Unterschied ist, ob du sagst "nach unten geöffnet" oder "andersrum" ?

Christoph: Weil a ist ja nicht unbedingt eine positive Zahl, die Variable a, weil es kann auch eine negative sein. Ich glaube, Julia hat sich vorgestellt, daß a einfach nur eine positive Zahl ist, und wenn man da ein Minus vorsetzt, das negativ ist.

Analyse der Unterrichtsbeiträge von Julia und Christoph

Grundlage von Julias Äußerungen ist ihre mentale Repräsentation einer Parabel, die im ersten Quadranten liegt und nach oben geöffnet ist. In einem ersten Schritt (Z 2 - 4) stellt sie sich vor, welche Auswirkung die Punktspiegelung auf die Öffnung der Ausgangsparabel hat. Dies wird für sie durch den Teilterm „–a" repräsentiert.

Danach beschäftigt sie sich mit der Variable „b" (Z 5 - 6). In Zeile 6 ist deutlich, daß diese für sie auch ursprünglich für eine positive Zahl steht. Sie überlegt, welche Auswirkung die Punktspiegelung auf die Lage des Scheitelpunkts bezüglich der Funktionswertachse hat. Der Scheitelpunkt liegt nach der Punktspiegelung für sie im dritten Quadranten. „b" muß deshalb für sie „in den Minusbereich" (Z 6). Diese Idee will sie formal im Funktionsschema umsetzen. Die für sie naheliegende Idee, dies durch „– b" zu repräsentieren, wird verworfen, weil im ursprünglichen Schema schon „– b" stand. Deshalb nimmt sie im Kopf eine Inversenbildung „– (– b)" vor und findet dies in Andreas Lösung in „+b" korrekt repräsentiert wieder. Für die Variable „c" liefert sie eine gleichartige Erklärung (Z 9 – 10).

Vergleicht man Julias mit Christophs Beitrag, so können wir von der Annahme ausgehen, daß auch Christoph sich eine konkrete (nicht aber eine beliebige) Parabel und deren Punktspiegelung vorgestellt haben wird. Während Julia beschreibt, was sie im Kopf sieht, ist ihm bewußt, daß nicht nach den Eigenschaften der von ihm gewählten Parabel gefragt, sondern nach einer allgemeinen Antwort gesucht ist.

Christoph benennt nicht nur den Fehler in Julias Äußerung, daß „– a" eine negative Zahl sei. Er weist darauf hin (Z 16 – 17), daß „a" sowohl positiv als auch negativ sein kann. Er interpretiert die Inversenbildung als Formalisierung des Prozesses des Umdrehens der Parabelöffnung (Z 13). Er zeigt durch seine Äußerung nicht nur, daß er im Mathematikunterricht ein adäquates Variablenverständnis entwickelt hat, sondern auch metakognitive Fähigkeiten. Bemerkenswert ist, daß Christoph sich nicht nur darauf beschränkt, den Fehler in Julias Beitrag aufzudecken, sondern vielmehr auch erklärt, wie es zu diesem Fehler kommen konnte: „Ich glaube, Julia hat sich vorgestellt, ..." (Z 17).

Konzeption der Aufgabe

Die Aufgabe ist bewußt für ein Funktionen-Schema gestellt worden, um mit den Schülern zu erarbeiten, wie das Wechselspiel zwischen formaler Repräsentation und dazu passender paradigmatischer eigener Vorstellung ablaufen kann. Der bei der Lösung auftretende Teilterm „-a" wird von Schülern oft als Name für eine negative Zahl angesehen (vgl. dazu die Analyse zur Aufgabe „.... -a ist eine negative Zahl ..." im Beitrag Cohors-Fresenborg et al., 1999, in diesem Band). Es soll weiter erarbeitet werden, welchen Vorteil an Klarheit die formale Darstellung gegenüber dem Hantieren mit geeignet gewählten, visuell repräsentierten Paradigmen hat, andererseits wie störanfällig der Übergang von einer formalen allgemeinen Darstellung zu einer bedeutungshaltigen Beschreibung sein kann. Im obigen Schülerdialog zeigt die Bemerkung von Christoph, daß dem Übergang von „a“ zu „-a“ in der formalen Repräsentation in der Umgangssprache im Wort „umgekehrt“ eine adäquate sprachliche, die gleiche Allgemeinheit ausdrückende Formulierung zur Verfügung steht. Wenn – wie in unserem Unterricht – das Wechselspiel von Repräsentation und Metakognition ein wichtiges Leitmotiv bei der Gestaltung ist, dann wird die hier besprochene Aufgabe nicht nur gestellt, um etwas über den Zusammenhang von Funktionsschemata und Parabeln zu erfahren, sondern mit dem Ziel, daß sich analoge Dialoge (wie hier zwischen Julia und Christoph) ergeben und diese in einem Unterrichtsgespräch zu einer Reflexion über das genannte Leitmotiv ausgeweitet werden können. Dazu bedarf es einer Unterrichtskultur, in der die Verstärkung metakognitiver Aktivitäten durch geeignete Aufgabenstellungen und die langfristige Vernetzung von Leitideen und grundlegenden Modellvorstellungen eine zentrale Stellung haben. Die Erfahrungen von Lehrkräften, die solches praktizieren, zeigen, daß dieses einen Beitrag zur Nachhaltigkeit mathematischer Lehr-/Lernprozesse leistet.

Literatur

Boekaerts, M. (1996): Teaching Students in Self-Regulated Learning: A Major Success in Applied Research. In J. Georgas (Eds.), Contemporary Psychology in Europe, pp. 245 – 259. Göttingen: Hogrefe & Huber.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (1993): Zur Konzeption eines gymnasialen mathematischen Anfangsunterrichts unter kognitionstheoretischem Aspekt, S. 4 – 11, *Der Mathematikunterricht*, Heft 3/1993.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. & Griep, M. (1995): Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen – Lehrerhandbuch. 4. überarb. Auflage. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. & Griep, M. (1996): Mathematik in Klasse 9. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. & Schwank, I. & Sjuts, J. & Tüllinghoff, A. & Vogelsang, T. (1999): Verbesserung der mathematikdidaktischen Ausbildung durch den Einsatz eines multimediabasierten mathematikdidaktischen Analysesystems (MUMAS). Beitrag in diesem Band.

De Corte, E. (1995): Fostering Cognitive Growth: A Perspective From Research on Mathematics Learning and Instruction, pp. 37-46, *Educational Psychologist*, 30(1).

Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, pp. 334-370. New York: Macmillan.

Schwank, I. (1993): Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe und der Aufbau mentaler Modelle, S. 12-26, *Der Mathematikunterricht,* Heft 3/1993.

Sjuts, J. (1999): Metakognition im Mathematikunterricht. Beitrag in diesem Band.