Übersetzung von
Development of Metacognitive and Discursive Activities in Indonesian Maths Teaching - A theory based design and test of a learning environment. Erschienen in *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education* (IndoMS –JME) 2(1) 2011, S. 15-39.

# ENTWICKLUNG METAKOGNITIVER UND DISKURSIVER AKTIVITÄTEN IM INDONESISCHEN MATHEMATIK-UNTERRICHT

## Theoriegeleitete Entwicklung und Erprobung einer Lernumgebung

Christa Kaune, Elmar Cohors-Fresenborg (Institut für Kognitive Mathematik, Universität Osnabrück, Germany), Edyta Nowinska (Institute MATHESIS, Pyzdry, Poland)

## Abstract

Es wird über ein deutsch-indonesisches design research Projekt berichtet, das die mathematischen Kompetenzen von Schülern[1] in der Sekundarschule deutlich erhöhen soll. Da Ergebnisse internationaler Vergleichsuntersuchungen zeigen, dass ein Zusammenhang zwischen Metakognition und Lernerfolg besteht, wurde eine Lernumgebung für den Anfangsunterricht in Klasse 7 konzipiert, um metakognitive und diskursive Aktivitäten von Lernenden und Lehrenden deutlich zu steigern. Die Wirksamkeit des Konzepts wurde an einer Sekundarschule mehrmals erprobt.
In diesem Papier wird der theoretische Hintergrund für die Konstruktion der Lernumgebung dargestellt, einige Aufgaben werden exemplarisch vorgestellt und Schülereigenproduktionen aus dem Projektunterricht analysiert.

**Keywords:** Metakognition, Mikrowelten, grundlegende Modellvorstellungen, Metaphern, ganze Zahlen

## EINLEITUNG

Zwischen Mathematikdidaktikern an der heutigen Universitas Sanata Dharma (Yogyakarta) und der Universität Osnabrück gibt es seit 1982 eine enge Zusammenarbeit. Vom 01.10.2009 bis zum 31.12.2010 wurde als jüngstes gemeinsames Projekt eine Machbarkeitsstudie „Entwicklung metakognitiver und diskursiver Aktivitäten im indonesischen Mathematikunterricht (MeDIM)“ durchgeführt.

Mit ihr sollte überprüft werden, inwiefern eine zukünftige Pilotstudie zur Erhöhung der mathematischen Kompetenzen von Schülern in Klasse 7 der Sekundarschule Erfolg versprechend sein kann. In dieser Pilotstudie sollen Maßnahmen erprobt werden, die einen größeren Anteil der Schüler befähigen, die im Mathematikunterricht erarbeiteten mathematischen Konzepte und Verfahren wirklich zu verstehen.

Weil es sich um eine komplexe Innovation handelt, hielten wir es für angebracht, vorab in einer Machbarkeitsstudie geeignete Werkzeuge für die Pilotstudie zu entwickeln. Dies sind einmal Lernmaterialien für die Schüler und dazu passende Lehrerfortbildungen, aber auch Methoden zur Überprüfung des Lernerfolgs von Schülern und der Veränderung der Unterrichtskultur bei den Lehrern. Zusätzlich sollte der personelle und finanzielle Aufwand für die Pilotstudie abgeschätzt werden.

Eine wichtige Rolle bei der Innovation spielt eine Unterrichtskultur, bei der zwei Aspekte zentral sind:

- Vorrang für den Aufbau von tragfähigen Modellvorstellungen (über den Umgang mit Zahlen und algebraischen Umformungen) vor dem Vermitteln von Sachwissen und Einüben von Rechentechniken,
- Steigerung der metakognitiven und diskursiven Aktivitäten im Unterricht.

Als Ergebnis eines design research Projekts in Deutschland konnte heraus gearbeitet werden, wie diese Ideen, in ein Curriculumprojekt implementiert, zu einer deutlichen Steigerung der mathematischen Kompetenzen von Schülern geführt haben (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2001; Cohors-Fresenborg et al., 2002).

Forschungen haben gezeigt, dass metakognitive und diskursive Aktivitäten als fächerübergreifende Indikatoren für Unterrichtsqualität eine wichtige Rolle spielen. Einen Überblick findet man in Schneider & Artelt (2010). Die generelle Bedeutung von Metakognition für den Lernerfolg stellten schon Wang, Haertel & Walberg (1993, S. 272f.) in ihrer Metaanalyse empirischer Untersuchungen zum Erfolg schulischen Lernens heraus, indem sie feststellen, dass in der Rangfolge des Einflusses auf den Lernerfolg Metakognition hervorragend platziert ist.

Bei der zukünftigen Pilotstudie handelt es sich um ein design basiertes Forschungsprojekt, in dem Entwicklung von fachdidaktischen Theorien und das Kreieren von inhaltsbezogenen Lehr-Lernumgebungen Hand in Hand gehen (Wittmann 1995, S. 356) und sich gegenseitig unterstützen.

In Übereinstimmung mit Gravemeijer und Cobb (2006, S. 19) wurde das Projekt MeDIM in drei Phasen realisiert:

- Phase 1: *Vorbereitung und Konzeption*:

  Als Basis der intendierten Unterrichtskultur wurde ein Arbeitsbuch entwickelt, in dem einerseits geeignete Modellvorstellungen für das Verständnis von ganzen Zahlen angeboten werden. Andererseits musste ein Format für Aufgaben entwickelt werden, welche die Lernenden zu metakognitiven und diskursiven Aktivitäten anregt. Dieses Arbeitsbuch sollte die Lehrkraft in die Lage versetzen, die Lehr-Lernprozesse im Unterricht anders als bisher zu organisieren. Im Design des Arbeitsbuches war also das Potenzial für einen veränderten Mathematikunterricht zu implementieren:

  - Es waren Schülerdialoge aufzunehmen, die dazu dienen, verschiedene Aspekte eines neu eingeführten Begriffes zu thematisieren.
  - Es waren Vorstelllungen und Fehlvorstellungen zu präsentieren, mit denen die Schüler sich kognitiv und metakognitiv auseinander setzen können.

- Es waren Aufgabenbearbeitungen zu präsentieren, die für die Schüler als Vorbild für eigene Aufgabenbearbeitungen dienen sollen.

Es ist ein das Arbeitsbuch „Vertragsgemäßes Rechnen“ (Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011) entstanden, das - in Verbindung mit der intendierten Unterrichtskultur - die Rolle von dem spielt, was bei Wittman (1995) und Gravemeijer und Cobb (2006) als Lernumgebung bezeichnet wird.

- Phase 2: *Unterrichtsversuch*:
  Die Lernumgebung wurde an einer Sekundarschule in Yogyakarta mit einer Projektlehrerin erprobt. Der Projektunterricht wurde videographiert und Dokumente aus dem Unterricht wurden für eine spätere Analyse gesichert. Zur Evaluation der Lernergebnisse wurden Vergleichsarbeiten in der Versuchs- und der Kontrollklasse durchgeführt.
- Phase 3: *Analyse und Reflexion*:
  An Hand der Videodokumente und der Schülereigenproduktionen wurden die Lernprozesse und Lerneffekte beim Umgang mit der neuen Lernumgebung erforscht. Erkenntnisse aus der Erprobung konnten gewinnbringend in die Verbesserung der Lernumgebung und weitere Unterrichtsentwicklung eingebracht werden. Empfehlungen für die Lehrerbildung können formuliert und ein Konzept für eine Lehrerfortbildung entwickelt werden.

In diesem Aufsatz wird über die erste Phase berichtet. Dabei wird auch auf Schülerlösungen zurückgegriffen, die in der unterrichtlichen Erprobung in Phase 2 entstanden sind.

## THEORETISCHER HINTERGRUND

### Grundlegende Modellvorstellungen und Metaphern

Eine wichtige Frage beim Lehren und Lernen von Mathematik ist, wie man bei Schülern geeignete Vorstellungen mathematischer Inhalte und Methoden etabliert und wie diese wirken. Ein verbreitetes Vorgehen ist dabei der Aufbau von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1998) und mental models (Fischbein, 1989). Es handelt sich dabei um die Konstituierung von Bedeutung für einen neu zu erlernenden mathematischen Begriff durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge (vom Hofe, 1998, S. 97f.). Die weitere Ausdifferenzierung erfolgt dann im neu geschaffenen mathematischen Begriffssystem. Der Terminus „Grundvorstellung“ charakterisiert fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen (vom Hofe, 1998, S. 98).

Wir setzen uns von diesen Positionen in folgendem Sinne ab: Wir beginnen jeweils mit der Ausarbeitung von Wissenselementen, die den Schülern vertraut sind (aus dem Alltag oder auch aus ihren bisherigen theoretischen Beschäftigungen), und bauen diese in der Erfahrungswelt zu einem System, einer Microworld aus. Wir folgen damit einer Analyse von

Schwank (1995, S. 104): „Microworlds are the external places where the external actions – caused by the cognitive activities – take place; the effects of these actions give feedback to the mental organizations and the development of mental models.“ Eine Microworld muss funktionieren und im Keim die Ideen, Theoriebildungen und Vorgehensweisen enthalten, die später als mathematische Theorie gebraucht werden soll (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2005). Funktionieren meint, dass in einer solchen Microworld intellektuelle Vorgehensweisen erprobt und Erfahrungen gesammelt werden können bevor eine Mathematisierung vorgenommen wird. Anschließend wird das in der Microworld bewusst gemachte Verhalten präzisiert und formuliert, das meint „in Form gebracht“, und dann aufgeschrieben, also formalisiert. Dabei wird immer wieder reflektiert, ob das Gesagte oder Geschriebene mit dem Gemeinten zusammen passt. Es wird dabei reflektiert, wie das Aufgeschriebene von einem Leser benutzt oder verstanden werden wird.

Weil diese Microworld aus der Erfahrungswelt entwickelt wird, kann daraus ein Metaphernsystem (Lakoff & Johnson, 1980) generiert werden, auf das von den Schülern jederzeit als Evidenzbasis zurückgegriffen werden kann. Der intendierte Mechanismus des Zurückgreifens begrenzt den Umfang und die Leistungsfähigkeit des Metaphernsystems insofern, als dass es sich die Lernenden wirklich zu ihrem System zu Eigen gemacht haben müssen.

Deshalb hat für uns beim Design von Lehr-Lern-Umgebungen der Aufbau von tragfähigen Modellvorstellungen (über den Umgang mit Zahlen und algebraischen Umformungen) Vorrang vor dem Vermitteln von Sachwissen und Einüben von Rechentechniken.

In der Pilotstudie sollen Erfahrungen der Schüler mit Schulden und Guthaben zu einem Metaphernsystem „vertragsgemäßes Rechnen“ ausgebaut werden, in dem sich die Schüler den Prozess der Rekonstruktion des bei ihnen schon vorhandenen intuitiven Wissens über den Umgang mit Schulden und Guthaben zurechtlegen können. Der Übergang zu einem Vertragswerk (Axiomensystem) bedeutet dann, dass aus der bisherigen Erfahrung normativ festgesetzt wird, wie man sich in neuen Situationen verhalten soll. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung des Anwendungsbereichs eines mathematischen Werkzeugs und nicht um eine Abstraktion.

Lernwirksam wird dieses Vorgehen erst dadurch, dass die Schüler immer wieder abgleichen, inwieweit die neue vertragsgemäße Rekonstruktion mit dem in Verbindung steht, was sie vorher intuitiv gewusst haben, und inwieweit die formale Repräsentation Ausdruck dieses Wissens ist.

Unter Einsatz von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten wird von den Schülern die Bedeutung mathematischer Begriffe, die Zulässigkeit von mathematischen Operationen und die Korrektheit von Rechnungen durch Rückgriff auf dieses Metaphernsystem „Vertragsgemäßes Rechnen“ immer wieder erörtert werden.

**Abgrenzung zum Konzept der realistischen Mathematik**

In unserer Konzeption folgen wir zwar ein Stück weit der auf Freudenthal (1973) zurückgehenden bereichsspezifischen Lehr-Lerntheorie „Realisitic Mathematics Education“ (RME) (Gravemeijer, 1994). In einem entscheidenden Punkt gehen wir aber weiter als die Anhänger von RME.

Wir starten mit einer Analyse des Buchens von Kontovorgängen. Dieses entspricht einem „szenario“, wie von Gravemeijer et al. (2003, S. 53) beschrieben: "Of course, by saying the starting points are experientially real, we are not suggesting that the students had to experience these starting points first hand. Instead, we are saying simply that **the students should be able to imagine acting in the scenario**, as king, for example"

Auf diese Weise soll Mathematik rekonstruiert (reinvented) werden. Gravemeijer und Cobb (2006, S. 63-64) beschreiben in ihrem Theorierahmen (theoretical framework) diesen Prozess folgendermaßen: "This requires the instructional starting points to be experientially real for the students, which means that one has to present the students problem situations in which they can reason and act in a personally meaningful manner.

The objective of guided reinvention is that the mathematics that the students develop will also be experientially real for them. Learning mathematics should ideally be experienced as expanding one’s mathematical reality. We may further elaborate this point by clarifying the way in which Freudenthal conceives reality: ‘**I prefer to apply the term reality to what common sense experiences as real at a certain stage**’ (Freudenthal, 1991, p. 17). He goes on to say that reality is to be understood as a mixture of interpretation and sensual experience, which implies that mathematics, too, can become part of a person’s reality. Reality and what a person perceives as common sense is not static but grows, and is affected by the individual’s learning process."

Mit den Ansätzen von RME lassen sich Eigenschaften von mathematischen Objekten (hier: von negativen Zahlen) mit den dazugehörigen Rechenoperationen rekonstruieren. Was aber mit RME nicht rekonstruiert wird, ist das mathematische Verhalten, welches mit einer axiomatischen Fundierung der Zahlbereichserweiterung, wie es der Mathematik des 20. Jahrhunderts entspricht, verbunden ist. Bei einem Vorgehen gemäß RME können sich die Schüler gerade nicht zurecht legen, wie die Teile der Theorie der ganzen Zahlen funktionieren, die in diesem realistischen Szenario nicht vorkommen, wie beispielsweise die Multiplikation von zwei negativen Zahlen. Diese Theorieteile fallen unerklärt vom Himmel (they unexplained

appaer from nowhere). Ein solches Vorgehen ist nach unserer Meinung einer der wesentlichen Gründe dafür, dass sich bei Lernenden weltweit etwa ab diesem Zeitpunkt im Curriculum die Meinung verfestigt, dass Mathematik nicht zu verstehen sei.
Um dieses zu vermeiden führen wir die Praxis von RME weiter, indem wir das realistische Szenario vom Buchen in folgendem Sinn zu einer Mikrowelt ausbauen: Wir erfinden einen Vertrag, den wir mit der Bank schließen, so dass in Zukunft alle Buchungen der Bank mit diesem Vertrag begründet werden müssen. Die Gültigkeit und Sinnhaftigkeit dieses Vertragswerkes ist evident. Danach kommt die Abstraktion von der idealisierten Bank zur „Mathebank". Deren Vertragswerk ist dann ein Vertragswerk über den Umgang mit ganzen Zahlen.
„reality" im Sinne von Freudenthal (1991, S. 17) bezieht sich also in unserem Konzept auch auf die Erfahrung, Verträge zu verabreden und sich an sie zu halten.

**Metakognition und Diskursivität**

Seit Pólya (1945) werden Aktivitäten von Lernenden analysiert, die sich um die Lösung eines mathematischen Problems bemühen. Daraus ist in der Kognitionspsychologie das Konstrukt Metakognition entstanden. Eine erste systematische Dokumentation der Anwendung von Metakognition beim Lernen von Mathematik findet man bei Schoenfeld (1992). Unsere Dekomposition des Begriffs Metakognition, präzisiert in einem Kategoriensystem zur Klassifikation schrittweise kontrollierbaren Argumentierens (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007), baut zunächst auf diesen Ideen auf:
Eine wichtige Komponente von Metakognition wird im Planen von Problemlöseschritten, verbunden mit der Wahl von geeigneten mathematischen Werkzeugen, gesehen. Darüber hinaus hat im Prozess des Problemlösens der Einsatz dieser Werkzeuge kontrolliert zu werden, es muss eine Überwachung des Sach- und Zielbezuges durchgeführt werden sowie ein Abgleich zwischen den gesetzten Zielen und dem schon Erreichten. Diese Tätigkeit des Kontrollierens und Überwachens wird Monitoring genannt. Davon wird eine geistige Tätigkeit unterschieden, die sich mit dem Verstehen des gestellten Problems oder dem Nachdenken über bisher Erreichtes beschäftigt. Diese wird Reflexion genannt. Da wir den Fokus vom Problemlösen zu Begriffsbildung und Verstehen sowie von der individuellen Sicht zu Interaktionen im Unterricht erweitert haben, kommen noch weitere geistige Aktivitäten hinzu, die wir ebenfalls unter Reflexion subsumieren: Reflexion über die Adäquatheit von Begriffsbildungen und Metaphern, über das gewählte mathematische Vorgehen, über Vorstellungen und Fehlvorstellungen, sowie über das Zusammenspiel von Gesagtem, Gemeintem und Intendiertem (Darstellungen und Vorstellungen). Beim Monitoring kommt das Kontrollieren von Argumentationen

hinzu. In der Kategorie Planung spielt das Planen metakognitiver Aktivitäten eine Rolle, wie es zum Beispiel durch Wahl einer geeigneten Aufgabe oder Präsentation einer Schülerlösung zu Beginn eines Unterrichtsabschnittes erfolgen kann.

Ein tieferes Verständnis von Begriffen, eingeschlagenen Vorgehensweisen und benutzten Werkzeugen ist aber nur möglich, wenn sich Monitoring und Reflexion präzise auf das beziehen, was im Unterricht gerade diskutiert wird. Dazu muss den am Unterrichtsdiskurs Beteiligten die Verankerung der Redebeiträge deutlich gemacht und das Verstehen des Gesagten durch eine adäquate Wortwahl unterstützt werden. Wir haben die dazu notwendigen Aktivitäten unter dem Begriff diskursive Aktivitäten subsumiert. Diskursivität ist für eine Unterrichtskultur zentral, die die metakognitiven Aktivitäten der Lernenden fördern soll.

Zur Präzision beim Lesen und Aufschreiben mathematischen Wissens und beim Argumentieren im Mathematikunterricht gehört wesentlich die Fähigkeit, den Unterschied zwischen Dargestelltem und Intendiertem erfassen und ausdrücken zu können. Dazu ist notwendig, Argumentationsstränge zu verfolgen, die Tragfähigkeit von Argumenten einzuschätzen und Zweifel sowie Gegenargumente strategisch adäquat platzieren zu können. Hier zeigt sich, dass metakognitive und diskursive Aktivitäten ineinander verwoben sein müssen.

Einen Einblick in die Benutzung dieses Kategoriensystems für metakognitive und diskursive Aktivitäten findet man in Cohors-Fresenborg & Kaune (2007), eine ausführliche Dokumentation mit klassifizierten Ausschnitten von Mathematikstunden vom ersten bis zum dreizehnten Schuljahr findet man in Kaune & Cohors-Fresenborg (2010).

## THEORIEGELEITETE ENTWICKLUNG EINER LERNUMGEBUNG

### Ausgangslage

Eine Analyse eingeführter indonesischer Schulbücher (Adinawan, 2006 und Marsigit, 2008) zeigt, dass deren Konzeption den Aufbau von adäquaten Vorstellungen zum Umgang mit ganzen Zahlen nicht unterstützt, da weder durch die erklärenden Texte noch durch Bearbeitung der Aufgaben Beziehungen zwischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen angebahnt bzw. hergestellt werden. Die Zugangsweise zur Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen erfolgt in beiden Büchern über eine Veranschaulichung mit Pfeilen, die zunächst an zwei verschiedenen Zahlenstrahlen und später an einem einzigen dargestellt werden. Dabei repräsentiert die Länge des Pfeils den Betrag der Zahl und die Richtung der Pfeilspitze ihr Vorzeichen. Diese Repräsentation ist nur eingeschränkt zu nutzen, da sich der Summand Null nicht als Pfeil darstellen lässt. Andererseits begünstigt eine zu dieser Veranschaulichung entwickelte formale Notation der Rechengesetze zum Umgang mit ganzen

Zahlen (vgl. Adinawan, 2006, S. 7) die Ausbildung einer weit verbreiteten Fehlvorstellung: „-a ist eine negative Zahl.“ (Sjuts, 2002, S. 82f.)

**Übersicht über die Konzeption der Lernumgebung**

Bei der Konstruktion der Lernumgebung zur Einführung der ganzen Zahlen ermöglichen wir den Lernenden die Ausbildung zweier ganz unterschiedlicher grundlegender Modellvorstellungen: Zum einen kreieren wir eine Bankumgebung, in der das Buchen von Guthaben und Schulden auf einem Bankkonto den Kern bildet. Dieses Modell ist in europäischen Mathematikbüchern seit vielen Jahrzehnten weit verbreitet: „Attempts were made to reconcile ideas of assets and debts, or above and below sea level and so on, with the formal-operational structure of the negative numbers, by founding the sign-rules on concrete models” (Streefland, 1996). Zum anderen haben wir ein in der deutschen Mathematikdidaktik eingeführtes Bewegungsspiel (Kliemann et al., 2009) namens „Hin und Her“ modifiziert, das den Lernenden ermöglicht, auf der Grundlage von Bewegungserfahrung eine Microworld aufzubauen, die später ebenfalls als Metaphernsystem für den Umgang mit ganzen Zahlen genutzt werden kann. Das Spielbrett und die vereinbarten Spielregeln tragen auch dazu bei, Zahlraumorientierung und Zahlvorstellungen durch das Erleben von dynamischen Ereignissen am Zahlenstrahl zu entwickeln. Während die Bankumgebung eher den kardinalen Zahlaspekt nahe legt, betont das Hüpfspiel eher den ordinalen Zahlaspekt.

Im Folgenden wird einmal das Design der Lernumgebung inhaltsorientiert vorgestellt. Dabei liegt der Schwerpunkt auf den beiden Microworlds. Danach wird das Design unter dem Aspekt eines besonderen Aufgabenformats vorgestellt, das metakognitive und diskursive Aktivitäten von Schülern evozieren soll. Jedes Mal werden Aufgabenbearbeitungen von Schülern präsentiert, um zu zeigen, wie die Konzeption gedacht ist und wie sie angenommen wird.

Aufbau der Microworld „Buchen von Guthaben und Schulden“

Ausgangspunkt ist das intuitive Wissen der Schüler darüber, wie man mit Schulden auf einem Bankkonto umgeht. Dieses Vorwissen wird zunächst bewusst gemacht. In einem ersten Schritt protokollieren die Schüler Buchungen auf sogenannten Kontokarten einer „Mathebank“.

Auf der folgenden Kontokarte fehlen Eintragungen:

| Lfd. Nr. | Datum | alter Saldo | Umsätze | | neuer Saldo |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Auszahlung | Einzahlung | |
| 1. | 12.10.09 | 250.000 | | 25.000 | 275.000 |
| 2. | 17.10.09 | 275.000 | 17.500 | | 257.000 |
| 3. | 28.10.09 | 257.000 | 130.250 | | 127.250 |
| 4. | 31.10.09 | 127.250 | | 18.375 | 145.625 |
| 5. | 02.11.09 | 145.625 | | 20.025 | 165.650 |

a) Fülle die Karte passend aus.
b) Erfinde eine kurze Geschichte, die zu dieser Kontokarte passen könnte.

**Abb. 1: Kontokarte, die von einem Schüler korrekt ausgefüllt wurde**

Damit soll begonnen werden, aus vertrauten Wissenselementen eine Microworld auszubauen. Als Form wird in diesem Schritt die „Kontokarte" gewählt. Die Schüler sollen zwischen dieser Formalisierung und dem inhaltlichen Buchen hin und her wechseln können. Dazu dient Aufgabenteil b. Gleichzeitig dient dieser Aufgabenteil auch dazu, dass Schüler über mathematische Inhalte in ihrer Umgangssprache schreiben lernen:

*Ardi hat ein Konto bei der Bank mit dem Kontostand Rp. 250.000,00. Am 12.10.09 hat er Rp 25.000 eingezahlt. Sein neuer Saldo wird Rp 275.000,00. Am 17.10.09 hat Ardi Rp 17.500,00 ausgezahlt, weil er Sandale kaufen wollte. Sein Saldo wird Rp 257.500. Am 28.10.09 hat Ardi wieder Rp 130.250 ausgezahlt, deshalb wird sein Saldo Rp 127.250. Am 31.10.09 hat Ardi wieder Rp 18.375,00 bei der Bank eingezahlt. Sein Saldo wird Rp 145.625,00. Am 2.11.09 hat Ardi Rp 20.025 eingezahlt. Sein neuer Saldo ist Rp 165.650.*

**Abb. 2: Buchungsgeschichte zu der in Abb. 1 vorgegebenen Kontokarte**

Daran anschließend wird aber nicht durch Abstraktion schon der Weg zur mathematischen Begriffsbildung beschritten, sondern es werden die intellektuellen Vorgehensweisen erprobt und Erfahrungen gesammelt, bevor eine Mathematisierung vorgenommen wird.

An dieser Stelle kommt der Wahl einer geeigneten äußeren Repräsentationsform für den zu bildenden Begriff „positive bzw. negative ganze (später auch: rationale) Zahl" eine entscheidende Rolle zu. Diese wird in zwei Schritten entwickelt. Abb. 3 zeigt die erste Abstraktionsstufe: auf irrelevante Informationen der Kontokarte wird verzichtet. Relevante Informationen der Buchung werden in einer ersten formalen Kurzschrift dargestellt. Sie beinhaltet noch zwei Kennzeichnungen für Salden: H für Haben und S für Soll (im Indonesischen K für Haben, D für Schulden).

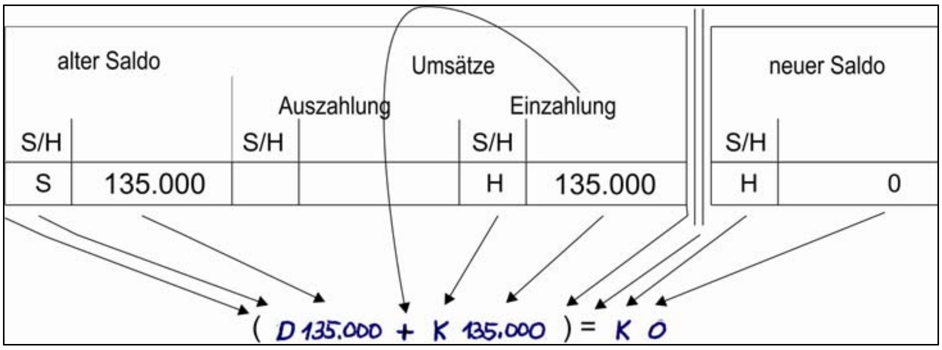



**Abb. 3: Entwicklung der Formalisierung aus der Kontokarte**

Abb. 4 zeigt, wie wir über eine zwischengeschaltete Formalisierung zu der üblichen formalen Notation gelangen. Wir gehen in diesem Aufsatz nicht näher darauf ein, warum und wie lange wir bei Termen Außenklammern setzen und wie wir diese für Schüler nachvollziehbar später einsparen. Dieses wird den Schülern im Textbuch erläutert:

*Buchungen in der Kurzschrift lassen sich schneller aufschreiben als die Eintragungen in Kontokarten. Man kann aber noch etwas Schreibarbeit einsparen:*
*Bisher benutzen wir zwei Kennungen für Salden: H für Guthaben und S für Schulden. Es reicht aber ein einziges Zeichen aus. Wir entscheiden uns dafür, die Schulden weiterhin mit einem Zeichen zu kennzeichnen. H als Kennzeichnung für „Haben“ lassen wir weg. Zahlen ohne zusätzliches Kennzeichen sind dann Haben. Schulden sind das „Gegenteil“ von Haben. Für S 55.000 schreibt die Mathebank (−55.000). Wir nennen (−55.000) die Gegenzahl zu 55.000.*

**Abb. 4: Erklärung aus dem Schülerarbeitsbuch: Übergang von einer ersten formalen zur üblichen formalen Darstellung eines Buchungsvorgangs**

Durch Aufgaben, bei denen formale Darstellungen in umgangssprachliche Buchungsgeschichten und Buchungsgeschichten in formale Darstellungen übersetzt werden müssen, wird sichergestellt, dass später beim Lesen einer formalen Darstellung die passende Buchungsgeschichte im Kopf aufgerufen werden kann:

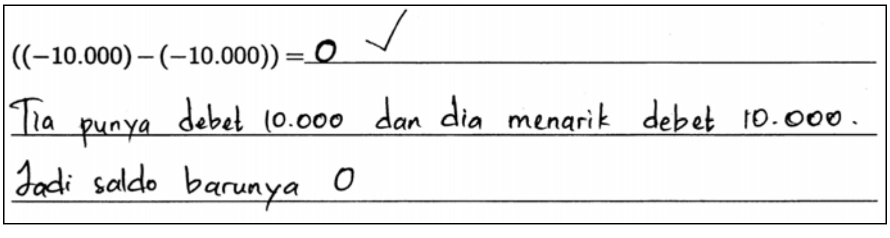



**Abb. 5: Buchungsgeschichte einer Schülerin zu der vorgegebenen formalen Darstellung**
**[Tia hat Soll 10.000 und sie hat Soll 10.000 ausgezahlt. Ihr neuer Saldo ist 0.]**

Der Haken hinter der korrekten Rechnung ist von einer Schülerin notiert. Es entspricht den im Projekt intendierten Zielen, die Schüler zum Monitoring (ihrer eigenen Rechnungen) anzuhalten und wird durch Aufgabenstellungen auch gefordert. Dabei haben die Schüler auch zu reflektieren, ob das Geschriebene mit dem Gemeinten zusammen passt, wie das Aufgeschriebene von einem Leser benutzt und verstanden wird.

Abb. 6 zeigt ebenfalls eine korrekte Bearbeitung einer Schülerin. Anzumerken ist, dass die Zahlen in der Aufgabenstellung bewusst gleich gewählt worden sind. Bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgabenteile muss der Fokus auf die unterschiedlichen formalen Notationen von Ein- und Auszahlungsvorgängen gelegt werden.

| | |
|---|---|
| *Ich habe Rp. 350.000 Schulden und lasse mir Rp. 400.000 auszahlen.* | ((-350.000) - 400.000) = (-750.000) |
| *Ich habe Rp. 350.000 Schulden und zahle Rp. 400.000 ein.* | ((-350.000)) + 400.000) = 50.000 |

**Abb. 6: Formale Darstellung einer vorgegebenen Buchungsgeschichte**

Übergang von der Microworld „Buchen von Guthaben und Schulden“ zu einer Microworld „Vertragsgemäßes Rechnen“

Im nächsten Schritt wird für die Buchungspraxis der Mathebank ein Vertragswerk festgelegt, das genau das bisherige intuitive Wissen kodifiziert. Wir schreiben es wie ein Axiomensystem in der Mathematik auf und nutzen es für Buchungen bei der Mathebank auch so.

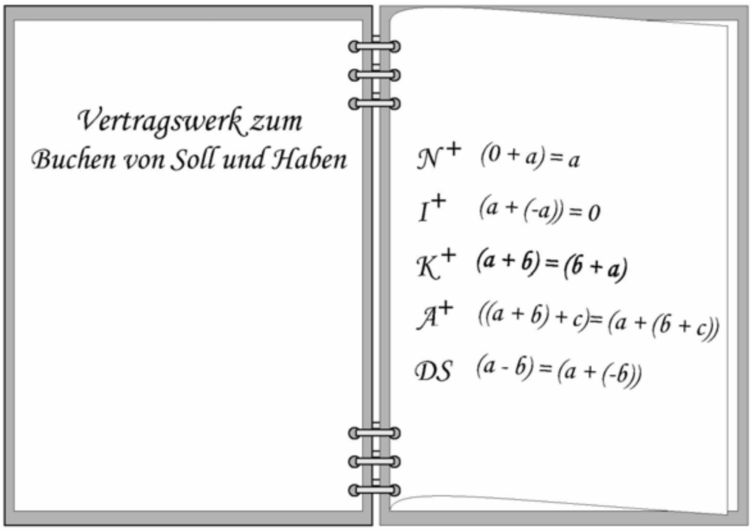



**Abb. 7: Vertragswerk mit der Mathebank zum Buchen von Soll und Haben**

Bezeichnungen der Namen der Paragraphen bereiten die spätere Verwendung im Vertragswerk zum Rechnen vor:

$N^+$ : **N**eutraler Summand
**$I^+$** : **I**nverses Element
**$K^+$** : **K**ommutativgesetz
$A^+$ : **A**ssoziativgesetz
DS : **D**efinition der **S**ubtraktion

Das Axiomensystem für die additive Gruppe der ganzen (und später auch der rationalen) Zahlen entsteht also nicht durch Abstraktion aus vielen Beispielen, sondern als eine Art Konstruktionsaufgabe, vorhandenes Wissen zu präzisieren und formal darzustellen. So regelt in diesem Kontext der Paragraph $N^+$ eine Kontoeröffnung, der Paragraph $I^+$ die Schließung eines Kontos. Die Paragraphen $K^+$ und $A^+$ beschreiben die Unabhängigkeit des neuen Saldos von der Reihenfolge vorgenommener Buchungen und der Paragraph DP regelt, dass Auszahlungen als spezielle Einzahlungen (der jeweiligen Gegenzahl) gebucht werden können.

Auf diese Weise wird der Schüler dazu angeleitet, die später benutzten Rechenregeln und deren Verwendung in der Microworld „Buchen von Guthaben und Schulden“ zu kontrollieren.

In einem letzten Schritt wird den Schülern das Vertragswerk aus Abb. 7 noch einmal präsentiert, jedoch auf der linken Seite mit dem Text „Vertragswerk zum Rechnen mit Zahlen“.

Die Aufgabe, dieses Vertragswerk zu konstruieren, ist nicht als anwendungsorientierter Unterrichtsansatz zu verstehen. Vielmehr wird im Sinne von Freudenthals „conceptual mathematization“ das intuitive Wissen in einem realen Kontext präzisiert, systematisiert und formalisiert und dann erst zu einem mathematischen Konzept der ganzen Zahlen entwickelt. „The problem is not in the first meant to be solved for problem solving purposes, but the real meaning lies in the underlying exploration of new mathematical concepts.“ (De Lange, 1996, S. 90)

Etablierung der Microworld „Bewegungsspiel“

Abbildung 8 zeigt das Spielfeld des Spiels „Hüpfen auf der Zahlenlinie“ und die Spielregeln. Anders als in den uns bekannten, publizierten Versionen (Kliemann et al., 2009) haben wir durch die Einführung der Anweisung: *„Wenn du deine Figur vor- oder zurückgesetzt hast, drehst du sie wieder nach vorne“* dafür gesorgt, dass nach jedem Wurf des Würfelpaars im auszuführenden Spielzug der Befehl des „Rechenzeichenwürfels“ durch eine eigene Handlung ausgeführt werden muss. So wird sichergestellt, dass die Bedeutungen der ein- und zweistelligen Funktionen, die beide durch ein Minuszeichen formal repräsentiert werden, im Kopf der Lernenden mit unterschiedlichen Handlungen verbunden werden. Die Spielzüge werden in der gleichen Darstellung wie bisher die Buchungen notiert.

Da das Spiel in Partnerarbeit gespielt werden soll, ist seine Durchführung ein Beitrag zum kooperativen Lernen.

**Abb. 8: Partnerarbeit: Würfeln, die Spielfiguren bewegen, danach die Spielzüge formal darstellen**

So geht´s:
Jeder Spieler stellt seine Figur neben das Startfeld. Es wird reihum gewürfelt und gezogen. Wer von euch als nächstes Geburtstag hat, darf beginnen. Um eine Spielfigur ins Spiel zu bringen, musst du eine „0“ würfeln. Dann stellst du die Figur so auf das Startfeld, dass sie nach vorne guckt. Du würfelst zunächst mit dem Rechenzeichenwürfel. Dabei bedeutet

+ : drehe deine Figur so, dass sie in die positive Richtung schaut;

: drehe deine Figur so, dass sie in die negative Richtung schaut.

Beim Zahlenwürfel bedeutet z.B.

3 : drei Felder in Blickrichtung vorwärts;

(- 2): gehe zwei Felder zur Blickrichtung rückwärts.

Wenn du deine Figur vor- oder zurückgesetzt hast, drehst du sie wieder nach vorne.
Wie beim „Mensch-ärgere-dich-nicht“ darfst du dreimal würfeln, wenn du keine Figur im Spiel hast, und du darfst auch gegnerische Spielfiguren rauswerfen. Diese kommen dann neben das Spielfeld und dürfen später wieder eingesetzt werden. Gewinner ist, wer zuerst seine Spielfigur ins Ziel gebracht hat. Dabei müssen die Zielfelder nicht mit der genauen Augenzahl erreicht werden. Alles klar? Na dann viel Spaß!

Notiert euch für eure Figur euren Spielstand so wie hier:

| Startposition | Rechenzeichen-würfel | Zahlenwürfel | Endposition |
|---|---|---|---|
| (0 | — | ( —2)) | 2 |
| (2 | + | ( —1)) | 1 |
| (1 | — | 3) | ( —2) |
| ( ( —2) | — | 0) | ( —2) |

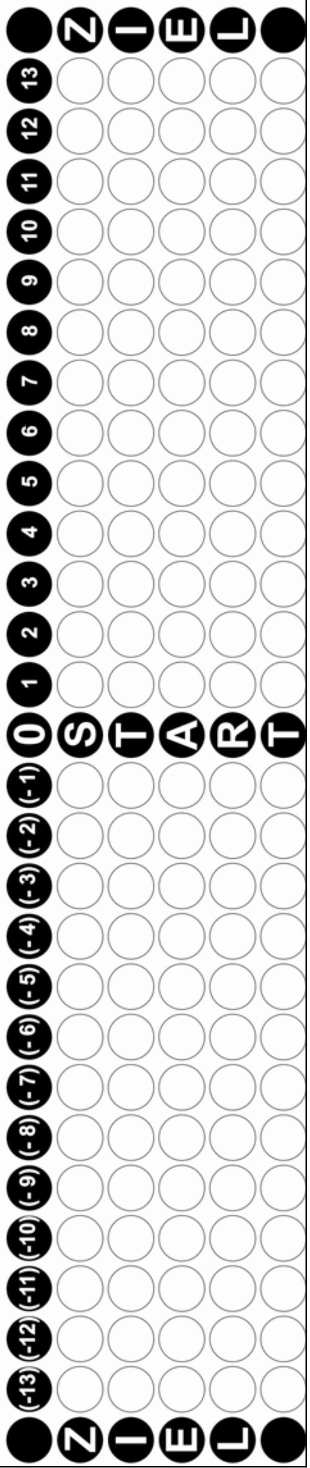



**Abb. 9: Spielplan und Spielregeln des Bewegungsspiels**

Der folgende Transkriptauszug zeigt die Besprechung von:

| | |
|---|---|
| **Aufgabe 3.4** | Maria ist mit ihrer Figur zwei Felder in positive Richtung gegangen. Was hat sie gewürfelt? ______ |

**Abb. 10: Aufgabenstellung zur Klärung von x +2 = x-(-2) in der Vorstellungswelt des Bewegungsspiels**

Das Transkript beginnt unmittelbar nach dem Vorlesen der Aufgabenstellung.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | Schüler | Positiv. Positiv. |
| | Lehrer | Positiv ...? |
| 12 | Schüler | (unruhig) Zwei. Positiv. Null. Äh, unwichtig. Positiv zwei. Plus zwei. |
| 14 | Lehrer | Was zeigt der erste Würfel? Was? |
| | Ein Schüler | Positiv |
| 16 | Lehrer | Positiv... |
| | Schüler | Zwei |
| 18 | | [*Lehrer schreibt +2 an die Tafel*] |
| | | +2 |
| 20 | Andre | Was ist mit minus minus zwei? |
| | Lehrer | Andre hat gesagt… |
| 22 | Ein Schüler | Minus zwei |
| | Lehrer | Minus... |
| 24 | Andre | Minus minus zwei |
| | Lehrer | ...minus zwei [*schreibt – (–2 )* |
| 26 | | *an die Tafel*] |
| | | +2<br>– (-2) |
| 28 | Schüler | Das ist das Gleiche, das Gleiche... |
| | Lehrer | Ist minus minus zwei auch möglich? |
| 30 | Schüler | Möglich... |
| | Lehrer | Einverstanden? |
| 32 | Schüler | Einverstanden... |
| | Lehrer | Warum? |
| 34 | Andre | Das Gleiche. |

**Abb. 13: Besprechung: Gilt x + 2 = x –(-2)?**

Als ein mögliches Würfelergebnis wird genannt:


**Abb. 11: Vorschlag 1 mehrerer Schüler**

Der Lehrer hält diesen Vorschlag an der Tafel in der Kurzschreibweise +2 fest. Die zweite Möglichkeit wird in Zeile 20 angesprochen:


**Abb. 12: Vorschlag 2 von Andre**

Auch dieser Vorschlag wird von dem Lehrer an der Tafel notiert. Ohne weitere Aufforderung durch den Lehrer rufen Schüler in Zeile 28, dass beide Darstellungen gleich seien. Sie meinen vermutlich, dass beide Würfelkonfigurationen die gleiche Wirkung auf die Spielfigur haben und denselben Endstand ergeben.

Die kurze Szene endet mit einer Lehrerfrage in Zeile 31, die der Vergewisserung dient und einer Aufforderung in Zeile 33 zu einer Begründung.

Insgesamt kann man nach diesem kurzen Ausschnitt festhalten: die Aufgabenstellung ist kognitiv aktivierend für die Lernenden, die Lernenden nehmen die Microworld an. Sie argumentieren in dieser über die Gleichheit der Terme. Die Rolle der Lehrkraft ist in dieser Szene die eines Mediators, der die beiden Positionen der Schüler zunächst an der Tafel notiert, sie aufeinander bezieht, und nicht selbst die Sachfrage klärt.

Es soll noch erwähnt werden, dass eine besondere Schwierigkeit in der Aufgabenstellung darin begründet liegt, dass die Ausgangsposition des Spielzugs nicht angegeben ist. Für eine beliebig, aber fest gewählte Position auf dem Spielbrett (Zahl x) sind eine Spielhandlung (zweistellige Funktion) und eine weitere Zahl y zu finden, die bewirken, dass von der Ursprungsposition (Zahl x) ausgehend eine um zwei Felder weiter rechts liegende Position (Zahl x+2) erreicht wird. Transformiert man die Aufgabenstellung auf die formale Ebene, so sind Interpretationen des Funktionszeichens $\circ$ und des Terms y gesucht, die für alle x die Gleichung $x \circ y = x + 2$ in eine wahre Aussage überführen. Diese verborgene Schwierigkeit wird auch von einer Schülerin im Unterrichtsgespräch formuliert:

| | | |
|---|---|---|
| 54 | Panta | Also ist das Problem in der Aufgabe falsch? (andere Schüler lachen) Ja, weil es nichts über den Anfang sagt... |

**Abb. 14: Reflexion von Panta über eine Schwierigkeit der Aufgabe aus Abb. 9**

Ob Schüler die grundlegenden mathematischen Konzepte verstanden haben zeigt sich auch daran, ob sie mit diesen Werkzeugen Problemsituationen aus unterschiedlichen Kontexten behandeln können. Deshalb schließt sich im Arbeitsbuch ein Kapitel an mit Beispielen für die Benutzung negativer Zahlen bei der Mathematisierung von Sachsituationen.

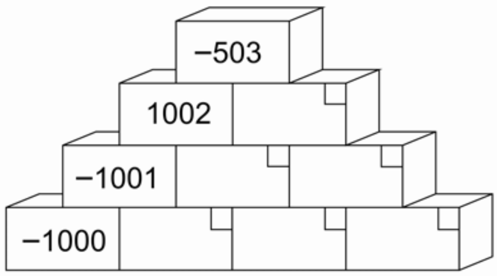
## AUFGABEN ALS INSTRUMENTE ZUR FÖREDERUNG METAKOGNITIVER AKTIVITÄTEN

Aufgaben sind ein wichtiges Instrument in der Hand des Lehrers zur Förderung individueller metakognitiver Aktivitäten der Schüler. Ihre Besprechung im Unterricht kann außerdem zu einer Veränderung der Gesprächskultur beitragen. Deswegen haben wir in deren Entwicklung große Anstrengungen investiert. An einigen ausgewählten Aufgabenbeispielen aus (Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011) soll nun demonstriert werden, wie die vorgenannten Theorien ineinander greifen und zur Konstruktion von Aufgaben genutzt worden sind:

Aufgaben, die Planungsaktivitäten evozieren

Im Kern der Aufgabe steht eine sogenannte Zahlenmauer. Zahlenmauern sind so aufgebaut, dass die Zahlen auf zwei nebeneinander liegenden Steinen addiert werden und die Summe auf denjenigen Stein geschrieben wird, der mittig über beiden Steinen liegt.

**Aufgabe 4.2** In dieser Zahlenmauer zum Addieren fehlen sechs Zahlen:




a) Es gibt mehrere Möglichkeiten für einen ersten Schritt. Schreibe in die obere rechte Ecke derjenigen Steine eine 1, die du im ersten Schritt bestimmen könntest. Rechne dann diese Zahlen aus und trage sie in die Mauer ein.

b) Markiere den Schlussstein mit einer 3. Rechne nun alle restlichen Zahlen aus und trage sie ein.

**Abb. 15: Aufgabe, durch die Schüler zu Planungsaktivitäten aufgefordert werden**

Die Aufgabe ist kognitiv aktivierend. Sie ermöglicht verschiedene Vorgehensweisen, die Zahlenmauer zu ergänzen. Ihre Besonderheit ist darin zu sehen, dass sie nicht das Befolgen nur einer Lösungsstrategie erfordert, sondern Planungsaktivitäten initiiert. Lernende sollen verschiedene Lösungswege planen, bevor sie sich für einen entscheiden.
Aus internationalen Studien ist bekannt, dass es schwierig ist, Lernende in planerischen Aktivitäten so zu trainieren, dass sie diese später auch selbstständig und zielgerichtet ausführen (Depaepe et al., 2010). Diese Aufgabe zeigt unser Bemühen darum, dass Lernende planen, Lösungsstrategien eigenständig entwickeln und sich diese zu eigen machen.

Aufgaben, die Monitoring-Aktivitäten evozieren

Aus Forschungen ist bekannt, dass ein Zusammenhang zwischen den Monitoringaktivitäten beim Bearbeiten einer Mathematikaufgabe und der Leistung besteht: „The lack of use of metacognitive monitoring activities in practice can be regarded as an important factor to explain failure of German students in the PISA-2000E study“ (Cohors-Fresenborg et al., 2010, S. 242). Es stellt sich also das Problem, geeignete Aufgaben zu konstruieren, die die Schüler zur Selbstüberwachung erziehen. Dabei hat es sich gezeigt, dass Aufgabenstellungen, in denen zunächst Rechnungen anderer zu überwachen sind, eine geeignete Vorstufe zur Kontrolle der eigenen Denkprozesse und zur Veränderung der Unterrichtskultur bilden.
In den meisten traditionellen europäischen Mathematik-Lehrbüchern werden zu vorgestellten Einführungsaufgaben in ein neues Thema fehlerfreie Lösungen präsentiert. Dies ist von Bedeutung, da diesen Aufgaben mit ihren Lösungen im Lernprozess die Rolle zur Erarbeitung des Stoffs zukommt, wenn beispielsweise ein Schüler wegen Krankheit den Unterricht versäumt hat. Dies ist auch in den von uns analysierten indonesischen Schulbüchern der Fall. In der von uns konzipierten Lernumgebung konfrontieren wir die Schüler aber mit sogenannten Fehlersuch-Aufgaben, die von den Lernenden die genaue Kontrolle einer jeden Buchung (Rechnung) fordert. Dazu werden von den Schülern Monitoring-Aktivitäten verlangt. Am Beginn der Unterrichtsreihe sollen die Schüler Aufgaben von folgendem Typ (Abb. 15, 16) bearbeiten:

In der folgenden Kontokarte sind Buchungsfehler. Markiere die Stellen.

| Lfd. Nr. | Datum | alter Saldo | Umsätzte | | neuer Saldo |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Auszahlung | Einzahlung | |
| 1. | 13.09.09 | 130.000 | 25.000 | | 105.000 |
| 2. | 14.09.09 | 105.000 | | 31.500 | 136.500 |
| 3. | 18.09.09 | 136.500 | 17.500 | | 120.000 |
| 4. | 21.09.09 | 120.000 | 20.000 | | 100.000 |
| 5. | 25.09.09 | 100.000 | | 30.000 | 70.000 |

**Abb. 16: Fehlersuchaufgabe**

| Fülle die folgende Tabelle aus: | | |
|---|---|---|
| | ist richtig | ist falsch |
| Ich habe alle Buchungen richtig durchgeführt. | | |
| Meine Buchungskarte enthält einen Fehler. Der erste Fehler ist in Zeile 1. | | |
| Meine Buchungskarte enthält einen Fehler. Der erste Fehler ist in Zeile 2. | | |
| Meine Buchungskarte enthält einen Fehler. Der erste Fehler ist in Zeile 3. | | |
| Meine Buchungskarte enthält einen Fehler. Der erste Fehler ist in Zeile 4. | | |

**Abb. 17: Maßnahme zum Monitoring der eigenen Rechnung**

Über die Kontrolle von Rechnungen und das Aufdecken von Fehlern gehen Aufgabenstellungen hinaus, in denen falsche Argumentationen zu entlarven und Sachverhalte richtig zu stellen sind. Dabei ist der eigene Standpunkt mit mathematischen Argumenten zu begründen. Dies verlangt von den Schülern, sich mit Mitteln der Sprache kritisch auseinander zu setzen und ihre Kompetenzen im Argumentieren und Kommunizieren zu schulen.

### Aufgaben, die Reflexionsaktivitäten evozieren

Aufgaben wie in Abb. 18 verlangen Reflexionstätigkeiten, zudem fordern sie Monitoring-Aktivitäten und fördern kooperatives Lernen.

Denke dir selbst die Kurzschreibweise einer Buchungsgeschichte aus:

Rp 750.000 − Rp 111.000 = Rp 639.000

Rp 639.000 + Rp 250.000 = Rp 889.000

Tausche nun mit deinem Tischnachbarn die Hefte und jeder übersetzt in dem Heft seines Nachbarn die Kurzschreibweise seines Tischnachbarn in eine ausführliche Buchungsgeschichte.

Rp 750.000

Bryant menyetor dan menarik Rp 111.000 dan menyetor

Rp 250.000

Tauscht nun die Hefte zurück und kontrolliert jeweils die Übereinstimmung von Kurzschreibweise und Buchungsgeschichte.

Falls du einen Fehler findest, berichtige ihn und erkläre deinem Nachbarn, was er falsch gemacht hat.

**Abb. 18: Aufgabe für kooperatives Lernen konzipiert**
[Bryant zählt Rp 750.000 ein und zählt Rp 111.000 aus und zählt Rp 250.000 ein.]

Die Aufgabenstellung verlangt, dass ein Schüler die Struktur einer von einem Mitschüler notierten, formalen Darstellung analysiert. Diese Darstellung ist in der Microworld „Buchen von Guthaben und Schulden“ zu interpretieren. Dies erfordert Reflexionstätigkeiten. Wird durch einen Schüler in der Lösung seines Mitschülers wie in Abb.18 zu sehen, ein Fehler identifiziert, so ist über diesen Fehler zu diskutieren. In diesem Fall wird zu klären sein, ob in der formalen Notation die Einheiten (Symbole für die Währungen) zu notieren sind. Abschließend hat der Schüler, der zuvor die formale Darstellung notiert hat, die Übereinstimmung seines mathematischen Ausdrucks und der von seinem Mitschüler geschriebenen Interpretation zu kontrollieren. Auch dieser Aufgabenteil erfordert Reflexion und Monitoring.

Die Abbildung 19 zeigt eine Schülerlösung zu einer weiteren Aufgabe, die Reflexionsaktivitäten initiiert. In dieser Aufgabe ist zu einer vorgegebenen Kurzschreibweise der Mathebank eine Buchungsgeschichte aufzuschreiben.

h) $((-10.000) - (-10.000)) = 0$

saya mempunyai debet Rp10.000 di bank tapi saya ingin menutup dan memindahkannya ke rekening lain, jadi saya akan menarik debet sebesar Rp10.000

**Abb. 19: Fiola nutzt eine der Mikrowelten für ihre Reflexion.**
[Ich habe bei der Bank Soll Rp 10.000, aber ich möchte dieses Konto auflösen und den Saldo auf ein anderes Konto übernehmen. Also, ich soll Soll Rp10.000 auszahlen.]

Die Schülerlösung gibt einen Hinweis auf den Nutzen der Benutzung von Mikrowelten im Umgang mit ganzen Zahlen. Die geschriebene Buchungsgeschichte liefert eine Begründung für den neuen Saldo, also für das korrekt notierte Ergebnis der mathematischen Aufgabe.

Die Verfügbarkeit des Metaphernsystems „Vertragswerk zum Umgang mit Zahlen“ eröffnet eine Möglichkeit, Argumentationsfähigkeiten von Lernenden im schrittweise kontrollierbaren Umgang mit mathematischen Inhalten zu fördern, Lernende zum Reden und Schreiben über die Mathematik und zu einer (vom Lehrer unabhängigen) präzisen Kontrolle eigener und fremder Lernergebnisse zu motivieren.

Die folgenden beiden Aufgaben zeigen, wie Rechnen, Termumformungen und Beweisen miteinander verzahnt sind (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2005).

$$
\begin{array}{ll}
(((-58) + 345) + 58) & \\
= ((345 + (-58)) + 58) & K^{+} \\
= (345 + ((-58) + 58)) & A^{+} \\
= (345 + (58 + (-58))) & K^{+} \\
= (345 + 0) & I^{+} \\
= 345 & N^{*}
\end{array}
$$

**Abb. 20: Vertragsgemäßes Rechnen**

$$
\begin{array}{lll}
(-(-a)) & = (0 + (-(-a))) & N^{+} \\
 & = ((a + (-a)) + (-(-a))) & I^{+} \\
 & = (a + ((-a) + (-(-a)))) & A^{+} \\
 & = (a + 0) & I^{+} \\
 & = a & N^{*}
\end{array}
$$

**Abb. 21: Vertragsgemäßes Beweisen von (-(-a))=a**

Aufgabe der Schüler war es in beiden Fällen, über jeden der einzelnen Rechen-/ Beweisschritte zu reflektieren: es sollte jeweils ein Paragraph angegeben werden, der den einzelnen Schritt legitimiert bzw. mit dem angegebenen Paragraphen eine passende Termumformung durchgeführt werden. Die Abkürzung des jeweiligen Namens wurde hinter der jeweilige Zeile notiert.
Gut zu erkennen sind in Abb. 20 die farbigen Unterstreichungen von Teiltermen in aufeinander folgenden Beweiszeilen. Dies ist bereits Ergebnis einer ersten Reflexion über Termstrukturen und eine methodische Hilfe zur weiteren Strukturierung der Terme. Auf dieser Grundlage fällt der nächste Reflexionsschritt, in der Termumformung die Wirkungsweise eines Paragraphen zu identifizieren, deutlich leichter.
Eine Reflexion von Syntax und Semantik klärt den Zusammenhang zwischen einem (mathematischen) Objekt, seinem Namen und einem Zeichen für seinen Namen. Abb. 22 zeigt einen Ausschnitt aus dem Arbeitsbuch, in dem thematisiert wird, dass die Schreibfigur $(-0)$ noch keine Bedeutung hat:

| |
|---|
| *Mit der Mathebank hatten wir zwar vereinbart, dass Rp 0 auf dem Konto als H 0 gebucht wird. Was wir uns aber unter Rp 0 Schulden vorstellen sollen, darüber hatten wir bisher nicht geredet. In der Mathematik gibt es den Term (−0) als Gegenzahl zu 0, wie wir gerade aus dem Vertragswerk hergeleitet haben. Welche Bedeutung hat (−0)? Denken wir ein bisschen nach.* |

**Abb. 22: Text aus dem Schülerbuch über die Bedeutung von (-0)**

Zum Abschluss werden die sich anschließenden Überlegungen in einem dreizeiligen Beweis zusammengefasst. Die Aufgabestellung für die Lernenden besteht dann darin, über die einzelnen Schritte zu reflektieren und sie durch entsprechende Paragraphen aus dem Vertragswerk abzusichern.

Entscheide für jeden Argumentationsschritt, ob ein Paragraph, ein Satz oder eine Zusatzvereinbarung benutzt wird. Schreibe dann auf die Linie den jeweiligen Namen:

| | | |
|---|---|---|
| $(0+a)$ | $= a$ | ______ |
| $(0+(-0))$ | $= (-0)$ | ______ |
| $0$ | $= (-0)$ | ______ |

**Abb. 23: Beweis:** $(-0)=0$

## FAZIT UND AUSBLICK

Im Mittelpunkt der Machbarkeitsstudie stand die Entwicklung einer besonderen Lernumgebung für Schüler zu Beginn der Klasse 7 in der Sekundarschule. Dabei wurde in besonderem Maße auf Theorien zurückgegriffen, die sich mit dem Nutzen von Microworlds und Metaphernsystemen zum Aufbau eines langfristig tragfähigen Verständnisses in den Köpfen der

Schüler befassen. In der hier vorgestellten Lernumgebung war es das Metaphernsystem „Vertragswerk zum Umgang mit ganzen Zahlen“. Durch diesen Ansatz wird den Schülern auch eine Einbindung für die im Rahmen der üblichen Schulmathematik notwendigen Begriffsbildungen im Bereich von Zahlbereichserweiterungen, Termumformungen, Gleichungslehre und die Methodik des Beweisens auf einer einheitlichen Grundlage ermöglicht. Es bietet sich an, auf dieser Grundlage auch weitere mathematische Inhalte aufzubauen. Dies hätte den Vorteil, dass zukünftig zu erwerbendes Wissen nicht fragmentiert gelernt, sondern in ein schon vorhandenes semantisches Netz eingeknüpft werden kann. Ein Zugewinn an Verstehen und Verständnis ist zu erwarten (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2005).

Das Ziel einer deutlichen Erhöhung mathematischer Kompetenzen von Schülern sollte aber auch durch eine Veränderung der Unterrichtskultur erreicht werden, so dass metakognitive und diskursive Aktivitäten zentral für das Unterrichtsgeschehen sind. Wichtige Werkzeuge dazu in der Hand des Lehrers sind nach solchen theoretischen Überlegungen konzipierte Aufgaben. Bei den vorgestellten Beispielen wurde mit Schülerlösungen gezeigt, wie der Einsatz dieser andersartigen Aufgaben im Erprobungsunterricht funktioniert hat.

In einem weiteren Aufsatz (Kaune et al., 2012) wird über Details dieser Erprobung und eine Evaluation der erreichten Ergebnisse berichtet werden. Es hat sich gezeigt, dass die entwickelten Werkzeuge funktionsfähig für eine Pilotstudie sind. Diese soll ab dem Schuljahr 2011/12 an mehreren Schulen auf Java durchgeführt werden.

## LITERATUR


Adinawan, M. Cholik et. al. (2006). *Mathematika untuk SMP KELAS VII Semester 1A*. Jakarta: Erlanger.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2001). Mechanisms of the Taking Effect of Metacognition in Understanding Processes in Mathematics Teaching, in Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries, Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, (S. 29-38). Ludwigsburg. From the web:
http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2001/index.html

Cohors-Fresenborg, E. & Schwippert, K. & Klieme, E. (2002). The Osnabrueck Curriculum: Mathematics as a Tool for the Representation of Knowledge - An Evaluation Study on the Basis of TIMSS-instruments (S. 44-55). Weigand, H.-G. et. Al (Eds.): *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries, Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam 2000*, Hildesheim: Franzbecker. From the web:
http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/index.html

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2005): The Metaphor "Contracts to deal with Numbers" as a Structuring Tool in Algebra (S. 300-310). Bosch, M. (Ed.): *Proceedings of CERME 4*, FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull. From the web:
http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG3.pdf

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). Modelling Classroom Discussions and Categorising Discursive and Metacognitive Activities (S. 1180-1189). Pitta–Pantazi, D. & Philippou, G. Proceedings of CERME 5. Lacarna: University of Cyprus. From the web:
http://ermeweb.free.fr/CERME5b

Cohors-Fresenborg, E.; Kramer, S.; Pundsack, F.; Sjuts, J. & Sommer, N. (2010). The role of metacognitive monitoring in explaining differences in mathematics achievement. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 42(2): 231–244.

De Lange, J. (1996). Real problems with real world mathematics. (S. 83–110). C. Alsina et al. (Hg.): *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Depaepe, F. et al. (2010). Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: analysis and impact on students beliefs and performance. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 42(2): 205-229.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics* 9 (2): 9–14.

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1994*). Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CDBeta press.

Gravemeijer, K., Bowers, J. & Michelle Stephan, M. (2003). A Hypothetical Learning Trajectory on Measurement and Flexible Arithmetic, Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, (12), In: *Supporting Students' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in Social Context*. (S. 51 – 66). Reston: National Council of Teachers of Mathematics

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker et. al. (Eds.), *Educational Design Research*, New York: Routledge.

Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (Hg.) (2010). Mathematik Gut Unterrichten - Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik

Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (2011). Perjanjian untuk Berhitung. Buku Pegangan bagi Guru. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C., Cohors-Fresenborg, E., Nowinska, E., Handayani, N. & Marpaung, Y. (2012). Development of Metacognitive and Discursive Activities in Indonesian Maths Teaching – Results of the feasibility study. IndoMS - JME 3(1).

Kliemann, S. et al. (2009). Mathe live: Mathematik für Sekundarstufe I, Klasse 6. Stuttgart: Klett.

Lakoff, J. & Johnson, M. (1980). Metaphors we live by. Chicago: University of Chicago Press.

Marsigit (2008). Mathematics for Junior High Scholl Year VII. Jakarta: Yudhistira.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* A New Aspect of Mathematical Method. University Press: Princeton.

Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 42(2): 149–161.

Schwank, I. (1995). The role of microworlds for constructing mathematical concepts. In M. Behara et al. (Eds.), *Symposia Gaussiana, Conference A: Mathematics and Theoretical Physics,* (S. 101–120). Berlin: Walter de Gruyter.

Sjuts, J. (2002). Metacognition in Mathematics Lessons. In H. –G. Weigand et al. (Hg.), *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries*. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern, 1999 (S. 76–87). Berlin: Franzbecker.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Hg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: Macmillan.

Streefland, L. (1996). Negative Numbers: Reflections of a Learning Researcher. *Journal of Mathematical Behavior* 15: 57–77 vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual mages: normative, descriptive and constructive aspects. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Hg.), *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity. An ICMI study* (S. 317-331). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wang, M. C.; Haertel, G. D. & Walberg, H. J. (1993). Toward a Knowledge Base for School Learning. *Review of Educational Research* 63 (3): 249–294.

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics Education as a “Design Science”. *Educational Studies in Mathematics*, 29: 355–374.

[1] Im Folgenden ist aus Gründen der besseren Lesbarkeit von Schülern bzw. von Lehrern die Rede, damit sind stets Schülerinnen und Schüler bzw. Lehrerinnen und Lehrer gemeint.