erschienen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, S.330-333, Hildesheim: Franzbecker

Christa KAUNE, Osnabrück

Analyse einer TIMSS-Aufgabe mit den Methoden der kognitiven Mathematik

Nach dem mäßigen Abschneiden der deutschen Schüler in TIMSS I wird in der didaktischen Forschung einerseits nach Erklärungen gesucht, andererseits werden u.a. auch in verschiedenen BLK-Versuchen erste Maßnahmen erprobt, um die zukünftige Leistungsfähigkeit der deutschen Schüler im Fach Mathematik zu steigern. Dieser Beitrag soll sowohl zur Suche nach Erklärungen der deutschen Schülerleistungen beitragen, als auch eine erfolgversprechende, seit einigen Jahren in einigen Gymnasien erprobte und inzwischen auch bewährte Maßnahme vorstellen.
Im Zentrum der Überlegungen steht das TIMSS-Item V2, eine Aufgabe aus dem Bereich der mathematischen Modellierung:

V2. Diese beiden Anzeigen sind in einer Zeitung erschienen in einem Land, in dem die Währungseinheit *zeds* ist.

Gebäude A	Gebäude B
Büroräume zu vermieten 85-95 Quadratmeter 475 *zeds* pro Monat 100-120 Quadratmeter 800 *zeds* pro Monat	Büroräume zu vermieten 35 – 260 Quadratmeter 90 *zeds* pro Quadratmeter pro Jahr

Eine Firma ist daran interessiert, ein 110 Quadratmeter großes Büro in diesem Land für ein Jahr zu mieten. In welchem Bürogebäude, A oder B, sollte sie das Büro mieten, um den niedrigeren Preis zu bekommen? Wie rechnest Du?

Die Aufgabe ist nur von 14% der in Deutschland untersuchten Schüler der Klassenstufe 8 richtig gelöst worden. Damit ist sie als eine der schwierigsten Aufgaben der Untersuchung ausgewiesen. Sie hat die Attribute: offen, mehrere Lösungswege, umgangssprachlicher Text, Modellierung mit Beurteilung. In didaktischen Analysen ist herausgearbeitet worden, dass deutsche Schüler mit solchen Aufgaben besondere Schwierigkeiten haben (Baumert, Neubrand, J. Neubrand). Aber all diese aufgezählten Eigenschaften erklären nicht hinreichend, warum die deutschen Schüler bei dieser Aufgabe enttäuscht haben.
Die Aufgabe ist – bezogen auf den benötigten rechnerischen Aufwand – komplex. Ein Schüler, der in der knapp bemessenen Testzeit eine solche Aufgabe lösen soll, ist dann im Vorteil, wenn er für Komplexität ein adäquates mentales Modell in kurzer Zeit zur Verfügung stellen kann. Die Mathematik stellt mit dem Begriff „Funktion mehrerer Veränderlicher“ ein solches kognitives Werkzeug zur Verfügung, mit dem das intuitive Wissen

um die Komplexität von Zusammenhängen in der Welt mathematisch präzisiert werden kann.
Im Mathematikunterricht werden traditionell nur Funktionen mit einer freien Veränderlichen betrachtet. Für die Umwelterschließung ist dies eine starke Einschränkung.... Man sollte daher bereits in der Sekundarstufe Funktionen mit mehreren Variablen betrachten (Vollrath 1999, S.133).
Denken in Funktionen ist mehr als das Benutzen von Funktionen. Es ist wiederholt berichtet worden (vgl. z.B. MU 1993, Heft 3), dass im Rahmen eines groß angelegten Niedersächsischen Schulversuchs Schüler im Gymnasium ab Klassen 7 u. a. mit tragfähigen Modellvorstellungen über Funktionen mehrerer Veränderlicher ausgestattet worden sind. Für solche Schüler gehört seit dem ersten Halbjahr Klasse 7 die Fähigkeit, Komplexität als Denken in Funktionen mehrerer Veränderlicher zu begreifen, zum festen Bestandteil ihres kognitiven Betriebssystems (Kaune, 1995). Ein Beispiel dafür, wie Schüler aus den Versuchsklassen ein komplexes Problem mit Funktionen mehrerer Veränderlicher darstellen, wenn sie z.B. in einer Klassenarbeit die dazu notwendige Zeit haben, findet man in Griep (2000).

Wir werden im folgenden zunächst eine Präzisierung und Formalisierung der Aufgabenstellungen des Items V2 mit diesem Werkzeug „Funktion mehrerer Veränderlicher" durchführen, um dadurch im mathematischen Modell die kognitive Komplexität der Aufgabenstellung aufzuzeigen. Anschliessend gehen wir auf empirische Befunde ein.

Modellierung mit Funktionen

Im ersten Schritt werden wir das Wissen aus den beiden Anzeigen über die Mietpreisgestaltung analysieren und danach formalisieren:
Im Gebäude A sind offensichtlich zwei verschiedene Typen von Büroräumen zu mieten, die sich von ihrer Größe her unterscheiden. Die zugehörige Preisfunktion p_A muss also mit der Technik Fallunterscheidung (mit zwei Fällen) definiert werden. Gesteuert wird diese über die Quadratmeterzahl. Jedoch hängt der zu zahlende Mietpreis in jeder der Komponentenfunktionen nur von der Mietdauer, nicht mehr von der tatsächlichen Quadratmeterzahl des Büros ab. Bezogen auf die Quadratmeterzahl ist die Mietpreisfunktion p_A eine Konstante.
Im Bürogebäude B gilt für alle angebotenen Büros eine einheitliche Mietpreisgestaltung. Die Preisfunktion p_B ist sowohl von der Quadratmeteranzahl als auch von der Dauer des Mietverhältnisses abhängig. Somit sind beide Preisfunktionen zweistellig. Schon der syntaktische Vergleich der beiden Funktionen zeigt einige deutliche Unterschiede: die Argumenttupel stimmen nicht überein, auch nicht die Definitionsbereiche, dazu kommt die Fallunterscheidung von p_A .

Gebäude A

$$p_A(q,m) = \begin{cases} 475 \cdot m & falls \quad 85 \le q \le 95 \\ 800 \cdot m & falls \quad 100 \le q \le 120 \end{cases}$$

q : Anzahl der Quadratmeter

m : Anzahl der Monate

$q \in N, m \in N$

Gebäude B

$$p_B(q,j) = 90 \cdot q \cdot j \quad falls \quad 35 \le q \le 260$$

q : Anzahl der Quadratmeter

j : Anzahl der Jahre

$q \in N, j \in N$

Versucht man mittels dieser beiden Preisfunktionen eine Antwort auf die gestellte Frage zu finden, so besteht eine erste Lösungsmöglichkeit im Vergleich der zwei Funktionswerte: $p_A(110, 12)$ und $p_B(110, 1)$:

Gebäude A

$$p_A(110,12) = 800 \cdot 12 = 9600$$

Gebäude B

$$p_B(110,1) = 90 \cdot 110 \cdot 1 = 9900$$

Der Vergleich der Funktionswerte ergibt, dass die Firma im Gebäude A das Büro günstiger mieten kann.

Eine zweite Lösungsstrategie kann darin liegen, eine der beiden obigen Preisfunktionen beizubehalten und durch Funktionseinsetzung die andere so zu verändern, dass beide Preisfunktionen identische Argumenttupel aufweisen. Behält man die Funktion p_B bei und setzt die Funktion j mit $j(m) = 12 \cdot m$ mit *m: Mietdauer in Monaten* in p_A ein. Dann werden folgende zwei Funktionen zu betrachten sein:

Gebäude A

$$\tilde{p}_A(q,j) = \begin{cases} 475 \cdot 12 \cdot j & falls \quad 85 \le q \le 95 \\ 800 \cdot 12 \cdot j & falls \quad 100 \le q \le 120 \end{cases}$$

q : Anzahl der Quadratmeter

j : Anzahl der Jahre

$q \in N, j \in N$

Gebäude B

$$p_B(q,j) = 90 \cdot q \cdot j \quad falls \quad 35 \le q \le 260$$

q : Anzahl der Quadratmeter

j : Anzahl der Jahre

$q \in N, j \in N$

Mit diesen beiden Funktionen lässt sich nun die Frage durch einen Vergleich der Funktionswerte $\tilde{p}_A(110,1)$ und $p_B(110,1)$ beantworten mit $\tilde{p}_A(110,1) = 880 \cdot 12 \cdot 1$ und $p_B(110,1) = 90 \cdot 110 \cdot 1$.

Empirische Befunde und deren Deutung

In einer empirischen Studie, bei der im Mai 1999 alle 8 Klassen der Jahrgangstufe 8 in zwei Gymnasien, in denen seit mehr als zehn Jahren nach dem o. g. Schulversuchskonzept unterrichtet wird, vom MPI in Berlin mit TIMSS-Aufgaben getestet wurden (Cohors-Fresenborg & Klieme, 2000), ergab sich, dass von den 179 Schülern der Versuchsklassen 46% das Item

V2 richtig gelöst hatten, während es die Vergleichsstichprobe aus TIMSS nur auf 37% richtige Lösungen brachte. Der deutlich größere Erfolg der Schüler der Versuchsklasssen lässt sich so interpretieren, dass die Schüler offensichtlich über kognitive Werkzeuge verfügen, mit Aufgaben einer größeren kognitiven Komplexität erfolgreich umzugehen. Misst man kognitive Komplexität mathematisch mit Funktionen, so gibt es zwei Arten: die eine lässt sich als Funktion mehrerer Veränderlicher, die andere als Einschachtelungstiefe von mehreren Funktionen beschreiben. Die hier vorgestellte Aufgabe verfügt über beide Anforderungen. Wir halten es deshalb nicht für erstaunlich, dass die Schüler der Versuchsklassen, die im Unterricht in diesen Dimensionen des Denkens ausgebildet worden sind, hier eine deutlich höhere Testleistung zeigen. Dieses stellt das Bezugssystem dar, in der sie sich ein detaillierteres Verständnis der Aufgabe zurechtlegen, „obwohl" seit der Einführung bis zum Zeitpunkt des Tests schon 1-1/2 Jahre vergangen sind. Das soll nicht heißen, dass sie in der Kürze der Testzeit explizit eine Beschreibung als Funktionsterm mehrerer Veränderlicher vornehmen und erst recht nicht, dass sie dieses auch zunächst formal darstellen, bevor sie die Frage beantworten. Wenn ein Schüler in der kurzen, ihm zur Verfügung stehenden Bearbeitungszeit diese Aufgabe löst, spielt es eine besondere Rolle, ob er unmittelbar eine geeignete Vorstellung (Rahmung) dafür in seinem Kopf aufrufen kann, wovon die Aufgabe handelt. Durch den Aufruf dieser Vorstellungen wird aus der Rahmung „undurchsichtig" die Sichtweise „beherrschbar durch ein leistungsstarkes Konzept".

Natürlich ist Ziel des Mathematikunterrichts nicht, eine gute Testleistung zu erreichen. Sie ist aber gerade in dem hier diskutierten Fall ein Indikator dafür, dass die Schüler bei der Bearbeitung von wirtschaftlichen Problemen aus dem Alltag spontan geeignete mathematische Werkzeuge aufrufen und erfolgreich einsetzen können. Dann hat der Mathematikunterricht in den Versuchsklassen offensichtlich einen langfristig nützlichen Beitrag geleistet.

Literatur

Baumert, J. & Lehmann, R.(1997): TIMSS-Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen.

Cohors-Fresenborg, E. & Klieme, E. (2000): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Beitrag in diesem Band.

Griep, M. (2000): Der Funktionsbegriff mehrerer Veränderlicher als ein Werkzeug zum besseren Verständnis des Umgangs mit CAS. Beitrag in diesem Band.

Neubrand, J. & Neubrand, M. & Sibberns, H. (1998): Die TIMSS-Aufgaben aus mathematikdidaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler. In W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.): TIMSS und der Mathematikunterricht. Hannover

Vollrath, H.-J. (1999): Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg