erschienen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1991, S.59-67, Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Christa KAUNE, Osnabrück

Die Computerwelt als Evidenzbasis zur Fundierung des algebraischen Anteils der Schulmathematik der Sekundarstufe I

1. Aspekte des Computereinsatzes im Mathematikunterricht

Ein wichtiges Kennzeichen, unter dem die Veränderungen des gymasialen Mathematikunterrichts im letzten Jahrzehnt betrachtet werden kann, ist die Einbeziehung des Computers. Welche Vorstellungen werden durch diesen Satz erzeugt?

Einige von Ihnen mögen zunächst daran denken, daß nun der Computer als Werkzeug oder als Medium im Mathematikunterricht eingesetzt wird. Als Folge dessen können die Schüler schneller, mehr und genauer rechnen oder aber mathematische Beziehungen graphisch veranschaulichen. Unter diesem hier vereinfacht dargestellten Gesichtspunkt lassen sich auch Aktivitäten subsummieren, die es ermöglichen, mathematische Teilgebiete zu behandeln, welche sich wegen ihrer rechnerischen Komplexität einer umfangreichen, wirklichkeitsnahen oder frühen Behandlung sonst entziehen würden.

Eine zweite Gruppe mag dabei daran denken, daß nun mathematische Grundlagen für die Anwendung der Informationswissenschaften in anderen Fächern exemplarisch besprochen werden können. Hier denke ich insbesondere an das Phänomen der Computersimulation von realen Prozessen, sowohl zur nachträglich verstehenden Beschreibung als auch zur Vorabbeurteilung von denkbaren Handlungsalternativen.

Eine dritte Gruppe mag daran denken, daß der Computer nun auch Gegenstand der mathematischen Reflexion geworden ist. Hierunter fällt die Behandlung der Möglichkeiten und Grenzen der algorithmischen Mathematik oder aber auch die exemplarische Behandlung von Programmiersprachen aus mathematischer Sicht.

Ein letzter Bereich wird beschrieben durch das Schlagwort von der informationstechnologischen Grundbildung. In allen Bundesländern wird die Diskussion geführt, in welchem Umfang der Mathematikunterricht seinen Anteil an dieser gesellschaftlichen Aufgabe wahrnehmen muß, sei es als sogenanntes Leitfach oder aber in einem integrativen Konzept, wie es hier in Niedersachsen praktiziert wird. In jedem Fall ist dazu auch eine neue Standortbestimmung des Mathematikunterrichtes vor dem Hintergrund des Allgemeinbildungsauftrages der Schule notwendig.

Ich möchte von Ansätzen berichten, die ich selbst mit Kollegen seit 1987 im Rahmen eines Schulversuchs des Niedersächsischen Kultusministers praktiziere. Die Andersartigkeit der Ansätze läßt sich viel eher verstehen, wenn man auf die ursprünglichen Ideen des Unterschiedes zwischen konstruktiven Begriffsbildungen und Abstraktion zurückgeht. Zusammengefaßt läßt sich vorab sagen: Die Liste der Aspekte des Computereinsatzes im Mathematikunterricht muß in unserem Sinne noch um einen weiteren ergänzt werden: Die Verfügbarkeit des Computers als Metapher und die paradigmatischen Erfahrungen von Schülern im Umgang mit automatisch ablaufenden, programmgesteuerten Prozessen verschieben die Evidenzbasis zur Fundierung der Schulmathematik. In unserem Schulversuch führen wir insbesondere vor, wie sich in dem sonst so mühsamen Bereich der Schulalgebra für Schüler Erfolge erzielen lassen und zudem Verständnis in einem Ausmaß erreicht wird, welches sonst als nicht erreichbar gilt.

2. Welche Merkmale weist ein erfolgreicher Schüler auf?

Bevor ich unser Konzept näher vorstelle, möchte ich an einer Schülerlösung, die ich aus einer Klassenarbeit von Schulversuchsklassen ausgewählt habe, einen Einblick in den Stand der Fertigkeiten unserer Schüler geben. Die Aufgabe ist dem Bereich Lineare Funktionen der Klassenstufe 7 zuzuordnen.

Als Anforderung war an die Schüler gestellt worden, mittels einer Funktionsgleichung einer mindestens sechsstelligen Funktion eine Anwendungsaufgabe zu bearbeiten. Dazu mußte die Funktionsgleichung notiert, alle auftretenden Variablen angemessen erklärt und im Aufgabeteil b ein Funktionswert mit Hilfe der Funktionsschreibweise notiert und schließlich auch berechnet werden. So wie Andrea, haben zwei Drittel der Schüler diese Aufgabe bearbeitet.

Bei dem hier vorgestellten Beispiel handelt es sich nicht um die herausragenden Leistungen von einigen wenigen Spitzenschülern, sondern dieses Beispiel dokumentiert den Leistungsstand, der in der Breite der von uns unterrichteten Klassen erreicht wird. Es soll an dieser Stelle auch erwähnt werden, daß die Schüler für unsere Klassen nicht besonders ausgesucht, sondern nach schulorganisatorischen Gründen bestimmt worden sind. Ihre Auswahl erfolgte nach Kriterien wie: Gemeindezugehörigkeit, Wahl der zweiten Fremdsprache und Geschlecht.

Aufgabe 4:
Folgender Tabelle ist die Fahrpreisgestaltung der Bundesbahn für den Autoreisezug D 1307 Berlin - München zu entnehmen:

Preise in DM für Hin- und Rückfahrt

Auto und Fahrer	jeder weitere Reisende		Anhänger		Hund
	Erwachsener	Kind (4-11 Jahre)	bis 2,5 m	ab 2,5 m	
666	168	107	213	364	61

a) Gib eine Funktionsgleichung zur Berechnung des Fahrpreises an. Alle auftretenden Variablen müssen erklärt werden.

b) Berechne den Fahrpreis für eine Familie, bestehend aus den Eltern, drei Kindern (3, 9 und 14 Jahre), die mit ihrem Hund den Autoreisezug benutzen wollen. Benutze dazu die Funktionsschreibweise.

4)

$g(a,b,c,d,e,f) = a \cdot 666 + b \cdot 168 + c \cdot 107 + d \cdot 213 + e \cdot 364 + f \cdot 61$ ✓

Erklärungen der Variablen:

a = Anzahl der Autos und Fahrer ✓

b = Anzahl jeder weiteren Erwachsenen ✓

c = Anzahl der Kinder von 4-11 Jahren ✓

d = Anzahl der Anhänger bis 2,5 m ✓

e = Anzahl der Anhänger ab 2,5 m ✓

f = Anzahl der Hunde ✓

b)

$g(1,2,1,0,0,1) = 1 \cdot 666 + 2 \cdot 168 + 1 \cdot 107 + 0 \cdot 213 + 0 \cdot 364 + 1 \cdot 61$ ✓

$= 666 + 336 + 107 + 61$

$= 1170$ ✓

Die Familie muß insgesamt 1170 DM für den Autoreisezug bezahlen. ✓

$168 \cdot 2$
336

666
$+336$
$+107$
$+61$
1170

3. Die Beherrschung der Funktionenwelt als technologisches System

Dem Funktions<u>begriff</u> ist in der Präambel der Niedersächsischen Rahmenrichtlinien Mathematik für das Gymnasium Klasse 7 bis 10 eine bevorzugte Stellung eingeräumt. Ihm wird neben dem Strukturbegriff die Stellung zugewiesen, dem Schüler den Aufbau der Mathematik durchsichtiger zu machen. Dieser Empfehlung stimmen wir zu, verstehen unter dem Funktionsbegriff jedoch fast immer den der Funktion mehrerer Veränderlicher. Die der Präambel folgende lineare Anordnung der Unterrichtsinhalte legt jedoch für die meisten Lehrer nahe, den Funktionsbegriff als einen Inhalt neben anderen zu unterrichten. In unserem Konzept nimmt der Funktionsbegriff die Rolle eines von zwei Fundamenten ein, auf dem das von uns unterrichtete mathematische Gebäude aufbaut.

In unserem Konzept ist der Begriff Funktion ein im Prinzip unerklärter Grundbegriff. Dies hat zur Folge, daß dem in der Lernsituation stehenden Schüler keine explizite Definition dieses Begriffs zur Verfügung steht, sondern daß der Begriffsumfang sozial vereinbart wird. Für ein geeignetes unterrichtliches Äquivalent dieser axiomatischen Auffassung halten wir das von uns praktizierte Vorgehen, die Verwendung des Wortes Funktion einzuüben. Auf diese Weise schaffen wir Evidenz für den damit aufgerufenen Funktionsbegriff.

Unser Unterrichtsziel im Sinne einer kognitiven Schnittstelle ist, daß die Schüler nach einem halben Jahr Mathematikunterricht in Klasse 7 souverän über die Handhabung der Funktionensprache verfügen. Darunter verstehen wir, daß sie

- Terme unter Anwendung der Körperaxiome handhaben und vereinfachen,
- Einsetzen von Funktionen darstellen, und
- Darstellungsformen wechseln können.

und bei Anwendungsaufgaben:

- die Funktionensprache zur inhaltlichen, begrifflichen Klärung eines vorgegebenen Sachverhaltes benutzen,
- Variablenbezeichnungen geschickt vornehmen und
- auftretende Variablen präzise erklären können.

Ein Schüler, der dieses Ziel erreicht, verfügt über ein universelles, kognitives Werkzeug, mit dem er wesentliche Teile der Schulalgebra erfolgreich bearbeiten kann. Er hat den Funktionsbegriff nicht als isolierten Begriff erworben, sondern das Ineinandergreifen von Systemlösungen und Anwendungen erlebt. In diesem Sinne erfolgte ein Technologietransfer vom unterrichtenden Lehrer auf den Schüler.

Es muß an dieser Stelle noch angemerkt werden, daß die Bereitstellung der Funktionensprache nicht voraussetzt, daß sich jeder Schüler die gleiche Vorstellung vom Funktionsbegriff macht. Die Forschungen von Schwank über prädikative und funktionale kognitive Strukturen zeigen, daß sich der prädikative Schüler den Funktionsbegriff als Zuordnung und Beziehungsherstellung vorstellt, der funktionale Schüler als Präzisierung der Vorstellung von Wirkungsverkettung.

Die Beschreibung der Anforderungen an unsere Schüler, was es heißt, die Funktionensprache souverän zu beherrschen, wird bei vielen das Gefühl erzeugt haben, daß dieses alles viel zu formal, zu abstrakt, zu wenig inhaltlich mathematisch ist. Dies bedeutet emotional, daß es für die Schüler abstoßend wirken muß. Und alle, die dieses denken, werden sich aus guten Gründen dabei auf ihre eigene Erfahrung berufen.
Unsere Schüler empfinden dieses überhaupt nicht so. Haben wir besondere Schüler? Das ganz sicher nicht. Können wir zaubern? Was heißt denn zaubern? Es heißt doch, wir benutzen Einsichten, die andere nicht haben und Werkzeuge, die der üblichen Erfahrung nicht zugänglich sind. Damit erreichen wir Dinge, die als nicht machbar gelten. In diesem Sinne können wir zaubern und zaubern gerne und erfolgreich.
Ich komme zurück auf den Vorwurf, daß unser Ansatz zu formal sei. Die Identifizierung des konkreten Manipulierens mit formalen Objekten mit der Vorstellungswelt "abstrakt-unverständlich" durch die erfahrenen Lehrer beruht auf einer Fehleinschätzung. Es fehlt ganz offensichtlich der Mut, in die Erarbeitung eines so zentralen Werkzeuges, wie es die Funk-

tionensprache darstellt, ernsthaft und massiv, (aus unserer Erfahrung mindestens drei Monate eines Schuljahres) zu investieren und dabei genauestens wissenschaftliche Ergebnisse über das Wechselspiel zwischen äußerer Darstellungsform und aufgerufenen inneren Vorstellungen der Schüler zu benutzen.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich diese Evidenzbasis für die Funktionensprache in den Köpfen von Schülern der Klasse 7 verankern läßt. Ich werde versuchen zu erklären, wie wir es gemacht haben, welche Rolle die Computerwelt dabei spielt und woran es liegt, daß es erfolgreich war. Ich behaupte jedoch nicht, daß dieses der einzig gangbare Weg ist.

4. Stellenwert der Computerwelt

Warum sprechen wir von Computerwelt und nicht von Algorithmieren oder Programmieren? Mit dieser Wortwahl möchte ich eine Vorstellung erzeugen, die nicht nur eine mathematisch-informatorische Behandlung eines Sachgegenstandes aufruft sondern die Komplexität einer mentalen Modellkonstruktion.

Damit besser verständlich wird, welche Rolle die in diesem Sinne verstandene Computerwelt bei unserem Ansatz spielt, möchte ich nun aus der Unterrichtspraxis einige Akzente setzen.

Die Computerwelt stellt für unsere Schüler zum Beispiel ein Paradigma bereit für die Erfahrung, was eigentlich passiert, wenn sie jemandem sprachlich codiert einen Auftrag geben, den dieser ausführen soll.

Versteht der Auftragnehmer die Sprache? Was heißt in diesem Zusammenhang verstehen? Kann dies unabhängig davon sein, ob er den Auftrag im Prinzip ausführen kann? Kann er allgemeine Aufträge verstehen, die wir Mathematiker gerne mit Variablen formulieren würden? Offensichtlich muß die Leistungsfähigkeit des Auftragnehmers bekannt sein, wenn das Ziel nicht durch eine Vorgabe sondern durch einen detaillierten Auftrag erreicht werden soll.

Eine genauere Analyse des Prozesses, wie jemand Bedeutung aus einem Text extrahiert, zeigt, daß an zentraler Stelle dabei eine Annahme über die der Sprache zugrunde liegende Grammatik gemacht worden ist. Prinzipiell ist die semantische Texterschließung ohne solche Annahmen über syntaktische Strukturen unmöglich.

Dies alles gibt Anregungen, mit den Schülern darüber nachzudenken, was es auf sich hat, wenn klare Befehle erteilt werden. Nun gibt es aber Personen, die nicht gerne reden, sondern lieber sprachfreie Mechanismen erfinden, die auch etwas bewirken sollen. Für das Funktionieren von Rechenwerken hilft eine Analyse der sprachlichen Probleme wenig. Hier gelten andere Vorstellungsmuster. Im weiteren Sinne versteht man unter der Computerwelt ja auch die Welt der automatisch ablaufenden Prozesse. Die Benutzung der Computerwelt heißt für uns aber auch, daß wir den funktional denkenden Schülern zunächst einmal ein mentales Modell anbieten, in dem sie relevante Begriffe sprachfrei bilden und benutzen, um dann zu einem späteren Zeitpunkt einzusehen, daß für Zwecke der Kommunikation präzise sprachliche Darstellungsformen notwendig sind. Dies ist bei einem Einsatz von geeigneten methodisch-didaktischen Maßnahmen durchaus zu erreichen. Gerade der Umweg über eine funktional verstandene Computerwelt ermöglicht es diesen Schülern, sich über die Schnittstelle der sprachlichen Darstellungsform emotional die algebraische Welt der Mathematik wenigstens so weit zu erschließen,daß sie auf Schulniveau sicher damit umgehen können.

Das Besondere unseres Ansatzes ist sicher auch darin zu sehen, daß alle diese Einsichten beim Umgang und Nachdenken über die Computerwelt gewonnen werden und nicht an die Lösung vermeindlicher Anwendungsprobleme gekoppelt sind. Durch das Schreiben, Analysieren und Vergleichen von Programmen wird eine geeignete Lernumgebung für den Begriff der funktionalen Abhängigkeit geschaffen. In dieser Anfangsphase sind für unsere Schüler die Funktionsschreibweisen nur spezielle Notationsformen, um die Wirkungen von Programmen auf die Eingabewerte zu beschreiben. Bei der Bearbeitung von Anwendungsaufgaben können dann später in einer weiteren Unterrichtseinheit realitätsnähere Anwendungen behandelt werden, da dann der souveräne Umgang mit mehrstelligen Funktionen vorausgesetzt werden kann. Es muß an dieser Stelle auch angemerkt werden, daß unseren Schülern viele Phänomene als künstlich zugeschnitten, bzw. als unerlaubt vereinfacht erscheinen, wenn sie nur durch eine Funktion von einer Veränderlichen angesehen werden. In diesem Zusammenhang ist dann viel Raum, um mit den Schülern über die Adäquatheit der jeweils vorgenommenen mathematischen Modellbildung nachzudenken.

Für unseren Ansatz ist auch weiterhin kennzeichnend, daß über ein überschaubares Netzwerk grundlegender Begriffe und Einsichten durch permanentes Wechseln des Standpunktes, der Darstellungsformen und der Vorstellungswelten immer genauer nachgedacht wird. Die systematische Benutzung von Metakognition bei so jungen Schülern ist für Außenstehende erstaunlich, erklärt aber für uns einen guten Teil des erreichten Verständnisses.

An dieser Stelle kann ich nur ansatzweise unsere Konzeption eines gymnasialen Anfangsunterrichtes in Mathematik darlegen. Die Details sind in einer Reihe von Textbüchern für Schüler und in umfangreichen Handbüchern für die unterrichtenden Lehrer nachzulesen.

5. Das zweite Standbein

Der Vollständigkeit halber möchte ich noch darauf hinweisen, daß neben dem bisher dargelegten Zugang, Funktionsdarstellungen als Formalisierung von prozeßhaftem und funktionalem Wissen zu begreifen, noch ein Aspekt zu ergänzen ist. Prädikatives Wissen läßt sich als Abstaktion aus Strukturverständnis und nominaler Begriffsbildung verankern. Dieser Aspekt wird im mathematisch-inhaltlichen Sinn mit der Behandlung der Fähhigkeiten zur Axiomatisierung und zur Interpretation von gegebenen Axiomensystemen beschrieben. In unserem Konzept existiert dazu eine schülergemäße Einführung mittels der Unterrichtseinheit "Sätze aus dem Wüstensand und ihre Interpretationen". Das Zusammenwirken von funktionaler/algorithmischer und axiomatischer Denkweise zur Konstitution einer neuen mathematischen Theorie wird für unsere Schüler zum ersten Mal wirksam bei der Einführung des Konzeptes der negativen Zahlen. Außerdem wird das Zusammenspiel dieser beiden Denkweisen auch benutzt, um einen neuartigen Zugang zu einer mathematischen Fundierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorzunehmen.

6. Ausblick

Die Zeit, die wir anfangs in den Aufbau von Modellvorstellungen, die Computerwelt und die Axiomatisierung investieren, erscheint mit 4 Monaten Unterrichtszeit in Klasse 7 als sehr hoch. Jedoch am Ende der Klasse 7 ist diese Zeit fast schon wieder eingespart. Jedoch bereits in Klasse 8 ist das für den Mathematiklehrer drängende Problem der Stoffülle verschwunden. Erste Erfahrungen mit Schülern der Klassenstufe 9, die zwei Jahre nach unserem Konzept unterrichtet worden sind, zeigen, daß sich in Zukunft ein neues Problem für die Mathematiklehrer stellen wird, adäquates Beschäftigungsmaterial für diese Schüler zu finden. In einem ersten Durchgang haben wir uns dafür entschieden, diesen Zeitraum zu nutzen um den Schülern

- ein modellhaftes Verständnis von Expertensystemen zu vermitteln und zum anderen
- eine Computersimulation komplexer wirtschaftlicher Vorgänge zu erstellen.

Die souveräne Beherrschung der Funktionensprache schafft auch hier die Voraussetzung für die Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Ideen und Inhalten.

7. Literatur

Cohors-FRESENBORG, E.; KAUNE, C.; GRIEP, M.: Sätze aus Wüstensand und ihre Interpretationen, 2. überarb. Aufl. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V. 1989

COHORS-FRESENBORG, E.; KAUNE, C.; GRIEP, M.: Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen, 3. überarb. Aufl. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V. 1990

Schwank, I.: Zur Analyse kognitiver Strukturen algorithmischen Denkens in: Haussmann, K./Reiss, M.: Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse. Göttingen: Hogrefe 1990