Die Metapher „Vertragswerke zum Umgang mit Begriffen” als strukturierendes Werkzeug im Algebra-Unterricht[1]

Elmar Cohors-Fresenborg & Christa Kaune

Institut für Kognitive Mathematik, Universität Osnabrück, D-49069 Osnabrück

Abstract: *Many students' mathematical knowledge is fragmented and they do not perceive the links between these fragments. A Cognitive Mathematics Education approach, i.e. an orientation on the thinking processes, gives a chance for change. We report about the main ideas and the outcome of a curriculum project, in which the construction of a cognitive mathematical operating system in the pupils' heads is put into the centre of our conceptual work. Metaphors play an import role in establishing the system. The aim is that in the beginning of any maths lesson this operating system boots in pupils minds and organises the connection of the mathematical knowledge. This hinders fragmentation. We present examples of pupils' work and analyse how the operating system controls the organising of mathematical knowledge.*

Schlüsselwörter: *Kognitive Mathematik, Metaphern, Algebra, Metakognition, Unterrichtskultur*

1. Einleitung: Kognitiv orientierte Mathematikdidaktik

Das mathematische Wissen vieler Schülerinnen und Schüler ist fragmentiert. Sie stellen keine Verbindungen zwischen diesen Fragmenten her, weil diese in ihrem Kopf nur als einzelne Gedächtniseinträge existieren. Um diesem Missstand abzuhelfen, haben wir für eine Neuorientierung des Mathematikunterrichts postuliert, dass der Aufbau eines kognitiven mathematischen Betriebssystems in den Köpfen der Lernenden Vorrang vor der Vermittlung von fragmentiertem und isoliert bleibendem mathematischem Sachwissen haben muss. Für die intendierte Neuorientierung des Mathematikunterrichtes haben wir den Schwerpunkt von einer stoffdidaktischen Orientierung zu einer kognitionstheoretischen Fundierung verschoben.

- Das Osnabrücker Curriculum (OC) postuliert, dass der Aufbau eines kognitiven mathematischen Betriebssystems in den Köpfen der Schüler Vorrang hat vor der Vermittlung von fragmentiertem und isoliert bleibendem mathematischem

1) Deutsche Fassung des auf dem 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4) angenommenen Beitrags *The Metaphor "Contracts to Deal with concepts" as a Structuring Tool in Algebra*

Sachwissen. Seine beiden bedeutenden Teile sind der „Funktionen-Frame“ und der „Vertragswerke-Frame“ mit geeigneten angehängten Prozeduren. Es enthält die Entwicklung von dazu geeigneten Lernumgebungen. Ein Ziel ist es, dass zu Beginn jeder Mathematikstunde dieses Betriebssystem in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler aufgerufen wird und dieses die Verbindungen des mathematischen Wissens organisiert. Bei der Konzeption des OC[2] für die Klassen 7 bis 10 des Gymnasiums sind wir dieser Leitlinie gefolgt.

- Die Unterrichtskultur ist bestimmt durch
  – eine Orientierung an den Vorstellungen der Lernenden, wobei die Beziehungen zwischen externen und internen Repräsentationen besonders berücksichtigt werden (Kaune, 2001a),
  – einen diskursiven Lehr- und Lernstil,
  – metakognitives Verhalten von Lehrkräften und Lernenden (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2003; englische Fassung 2001).

  Dies alles wird ergänzt um neue Aufgabenformate, Klassenarbeitsaufgaben und Textbücher für Schülerinnen und Schüler.

- Begleitende Grundlagenforschung konzentriert sich auf Begriffsbildungsprozesse, insbesondere
  – individuelle Unterschiede in kognitiven Strukturen, prädikatives versus funktionales Denken (Schwank, 1990; englische Fassung 1993),
  – die Rolle von mentalen Modellen und spezifischen Lernumgebungen.

Es stellt sich u.a. die Frage, ob die für die Erreichung dieser Veränderungen notwendigen erheblichen Gewichtsverlagerungen – die Inhalte des bisherigen Curriculums müssen in etwa 75% der Unterrichtszeit unterrichtet werden – auf Kosten der Leistung bei der Erreichung der Lernziele des Landescurriculums gehen oder ob die Investition in den Aufbau des Betriebssystems sich schon nach kurzer Zeit amortisiert.

Zur Überprüfung dieser Frage wurde eine Vergleichsstudie mit TIMSS-Instrumenten durchgeführt (Cohors-Fresenborg, Schwippert & Klieme, 2000). Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass es durch den Aufbau des o. g. kognitiven mathematischen Betriebssystems möglich ist, schon am Ende von Klasse 8 die dafür notwendige Unterrichtszeit wieder zu erwirtschaften und noch - auf den TIMSS-Maßstab bezogen - eine (auf Individualniveau signifikant) bessere Leistungsfähigkeit zu erreichen. Wir werten dies auch als einen Hinweis darauf, dass die oft beklagte „Stofffülle“ nicht das Haupthindernis für eine Verbesserung des

---

2) Das OC ist Ergebnis von zwei langjährigen Schulversuchen des Niedersächsischen Kultusministeriums zur Verbesserung des gymnasialen Mathematikunterrichts (Cohors-Fresenborg, 2001). Für eine erste Information auf Englisch verweisen wir auf Cohors-Fresenborg (1993b) und Cohors-Fresenborg, Schwippert & Klieme (2000).

Mathematikunterrichts ist, sondern die Unterrichtsqualität gesteigert werden muss.

In diesem Papier soll zunächst ein Einblick gegeben werden, wie einer der beiden Teile des kognitiven Betriebsystems, die „Vertragswerke-Metapher”, in den Köpfen der Lernenden entwickelt wird. Ein Ziel dabei ist, dass zukünftig zu erwerbendes Wissen nicht fragmentiert gelernt, sondern in ein schon vorhandenes semantisches Netz eingeknüpft wird. Die Metapher „Betriebssystem” soll deutlich machen, dass eine wichtige Aufgabe beim Aufbau eines Wissensnetzes auch in der Organisation des Zugriffs besteht. Weiter analysieren wir anhand von Fallstudien, welche Rolle das Betriebssystem bei der Auseinandersetzung von Schülerinnen und Schülern mit Algebra-Aufgaben und Beweisen spielt. Diese Analyse soll auch theoretisch erklären, worauf wir die in der o. g. empirischen Studie festgestellte Leistungssteigerung gerade der durchschnittlichen und schwächeren Lernenden zurückführen: ihr Wissen bleibt nicht fragmentiert, sondern der Wissenszugriff ist organisiert.

2. Die Metapher „Vertragswerk” als ein Bestandteil eines kognitiven mathematischen Betriebssystems

Die von Davis & MacKnight (1979) in die kognitiv orientierte Mathematikdidaktik eingeführte Beschreibung des mathematischen Schülerwissens mit den Begriffen „frame” und „procedure” gibt Anlass, nach grundlegenden Frames und Prozeduren zu suchen. Diese müssen als Teile eines mathematischen kognitiven Betriebssystems im gymnasialen Anfangsunterricht in den Köpfen der Lernenden aufgebaut und deren Zusammenwirken muss für den Lernenden bewusst eingeübt werden.

Der „Funktionen-Frame” und der „Vertragswerke-Frame” sind die wichtigsten Teile dieses kognitiven mathematischen Betriebssystems. Beide Frames benutzen den Frame „formale Repräsentation intuitiven Wissens”. Dies setzt bei den unterrichtenden Lehrkräften eine grundsätzliche Neubewertung des Stellenwerts von Sprache und Formalisierung im Mathematikunterricht voraus, legitimiert sich jedoch durch den Zugewinn an Verstehen und Verständnis. Die Einführung des „Funktionen-Frame” in Klasse 7 ist dargestellt in Cohors-Fresenborg (1993a,b), Kaune (1995) und Sjuts (1999a, S. 77-91). Es ist wichtig anzumerken, dass der „Funktionen-Frame” nicht lediglich ein Knoten von Sachwissen in einem Wissensnetz ist, sondern Teil des kognitiven Betriebssystems, welches den Gebrauch von Wissen organisiert, kontrolliert und unterstützt.

In einem gymnasial verstandenen Mathematikunterricht, der insbesondere auch Freude an der Theorie und Fähigkeit zu ihrer Benutzung vermitteln soll, ist ein

Verzicht auf ein tiefes Verständnis der theoretisch-mathematischen Begriffsbildung überhaupt nicht denkbar. Der Zugang ergibt sich bei unserem Ansatz mühelos durch die Frage, was denn mit den intuitiv vorhandenen mathematischen Begriffen eigentlich gemeint ist. Es ist klar, dass damit Fragen der Metamathematik, der Begriffsbildung in Axiomensystemen und der Natur von präzisen expliziten Definitionen und Beweisen unverzichtbarer Bestandteil des Unterrichts werden. Die axiomatische Methode ist ein Mittel, einen (mathematischen) Wissensbestand global zu ordnen, in sich zu sichern und weiter zu entwickeln. Es ist gelungen, durch die Bereitstellung einer geeigneten Mikrowelt „Sätze aus dem Wüstensand“[3] (Cohors-Fresenborg, Griep, Kaune & Schwank, 2003) schon Schülerinnen und Schülern in Klasse 8 hierfür eine auf lange Zeit tragfähige Rahmenvorstellung zu geben (Frauenknecht, 1993; Sjuts, 1993). Daran anschließend liefert die Mikrowelt „Vertragswerke für den Umgang mit Zahlen" (Cohors-Fresenborg, Kaune & Griep, 1998) einen Frame, welcher das Verständnis und die Einsortierung für die im Rahmen der üblichen Schulmathematik notwendigen Begriffsbildungen im Bereich von Zahlbereichserweiterungen, Termumformungen, Gleichungslehre und die Mehodik des Beweisens auf eine einheitliche Grundlage stellt. Auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Cohors-Fresenborg, Kaune & Griep, 1994) passt in diesen Rahmen: Sie ist ein Vertragswerk zum präzisen Reden über das Ungewisse. So wie in der Computerwelt neue Software mit Hilfe des Betriebssystems aufgespielt wird, ermöglicht das von uns konzipierte kognitive Betriebssystem, dass Schülerinnen und Schüler neue mathematische Theorien und Sichtweisen, wie Zahlbereichserweiterungen und Wahrscheinlichkeitsrechnung, schon beim Wissenserwerb in ihr vorhandenes Wissensnetz integrieren.

3. Der Nutzen der Metapher „Vertragswerk” im Algebraunterricht

3.1 Die Einführung der Metapher „Vertragswerk” im Unterricht

„Vertragswerk zum Umgang mit Begriffen” ist im Osnabrücker Curriculum eine Metapher (im Sinne von Lakoff, 1980) für den axiomatischen Umgang mit Begriffen. Entgegen dem üblichen Vorgehen in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik der sechziger und siebziger Jahre werden in der Unterrichtsreihe „Sätze aus dem Wüstensand” Axiomensysteme nicht durch Abstraktion aus vielen Beispielen eingeführt. Es wird vielmehr eine Rahmengeschichte „Vertragswerk zum Bau von Autobahnen” (Cohors-Fresenborg, Griep, Kaune & Schwank, 2003, S. 33) benutzt, in der ein Scheich mit einer Baufirma einen Vertrag zum Bau eines Autobahnnetzes abschließt. Im Unterricht wird debattiert, was auf Grund dieses Vertragswerks mindestens gebaut werden muss, mathematisch gesprochen, welche Eigenschaften jedes Modell des Axiomensystems haben muss.

---

3) Der didaktische Ansatz ist auf Englisch kurz in Cohors-Fresenborg (1987a, S. 268-271) dargestellt.

Es wird den Schülerinnen und Schülern außerdem vermittelt, dass der Prozess der Präzisierung von Begriffen durch Definieren irgendwann bei einer Menge von Begriffen enden muss, zu deren Präzisierung andere Werkzeuge nötig sind: Der Bedeutungsumfang dieser relativ zu den anderen grundlegenden Begriffe gilt als im Argumentationskontext evident. Eine Reflexion von Syntax und Semantik klärt den Zusammenhang zwischen einem (mathematischen) Objekt, seinem Namen und einem Zeichen für seinen Namen. Sie liefert eine tragfähige Vorstellung darüber, was eine Schreibfigur bedeutet, die die Existenz eines Objekts voraussetzt (Sjuts, 1999, S. 123). Durch den Aufruf der Metapher „Vertragswerk” wird dazu intuitiv vorhandenes Wissen der Schülerinnen und Schüler über die Problematik der Verwendung von Begriffen in juristischen Verträgen genutzt. Es wird so auch ein Zugang zum Verständnis des Unterschieds zwischen impliziten und expliziten Definitionen geschaffen. Beweise in einem Vertragswerk dienen dann auch dazu, sich zu vergewissern, ob die implizite Definition eines Begriffsnetzes durch das Vertragswerk (Axiomensystem) der Intention entspricht.

Im Folgenden werden wir kurz beschreiben, wie der Begriff „ganze Zahl” im Mathematikunterricht der Klasse 8 gemäß des Osnabrücker Curriculums eingeführt wird. Dann geben wir zwei Beispiele, eines betrifft lineare Gleichungen (in Klasse 8), das andere Termumformungen mit Zahlen in Wurzeldarstellung (in Klasse 9). Bei jedem Beispiel stellen wir erst eine Klassenarbeitsaufgabe vor und dann dazu passend einige Schülerlösungen (von Teilaufgaben), die interpretiert und analysiert werden.

3.2 Die Einführung der Metapher „Vertragswerk zum Umgang mit Soll und Haben”

Die Verfügbarkeit der Metapher „Vertragswerk zum Umgang mit Begriffen” erlaubt ein anderes Vorgehen zur Behandlung der Erweiterung des Zahlbereichs von natürlichen zu ganzen Zahlen: Mit einer Bank soll ein Vertrag zum Buchen von „Soll und Haben” geschlossen werden, der sicherstellt, dass die Bank in jedem Fall genau so bucht, wie der Kunde es sich vorstellt. Es geht also darum, vorhandenes intuitives Wissen über die Buchungspraxis von Geldinstituten bei der Kontoführung (das heißt, über das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen) zu präzisieren sowie Ein- und Auszahlungsvorgänge formal darzustellen. Das Ergebnis ist ein „Vertragswerk zum Umgang mit Soll und Haben“, mathematisch gesprochen ein Axiomensystem für Kommutative Gruppen. Dabei wird auch herausgearbeitet, inwieweit das Auszahlen sich als eine Umkehrfunktion zum Einzahlen auffassen lässt. Die sich ergebende Nominaldefinition für die Subtraktion wird von den Schülern (auch im später folgenden Transkript unter 3.3.2) beim Termumformen als *S* zitiert.

Da die Schülerinnen und Schüler aus der Unterrichtsreihe „Sätze aus dem Wüstensand“ bereits umfangreiche Erfahrung mit formalen Darstellungen gewonnen haben, schließt dies für sie selbstverständlich auch ein, dass die Endfassung der Gruppenaxiome in formalisierter Darstellung in der Prädikatenlogik aufgeschrieben wird. Die Schülerlösungen unter 3.2.2 zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler hier kein fragmentiertes Sachwissen, sondern eine Kompetenz erworben haben, die sie von sich aus einsetzen, wenn sie neue Sachverhalte formulieren und über sie argumentieren müssen.

3.3 Anwendungen im Themenbereich „Lineare Gleichungen”

Die erarbeiteten Körperaxiome, aufgefasst als ein Vertragswerk zum Rechnen, stellen ein Werkzeug dar, um Termumformungen zu legitimieren. Zum Lösen von linearen Gleichungen ist das Vertragswerk um zwei Paragraphen erweitert worden: *§* R^+ legitimiert die Addition eines Terms auf beiden Seiten einer Gleichung, *§* $R^\bullet$ legitimiert die Multiplikation.

3.3.1 Eine Klassenarbeitsaufgabe

In einer Klasse 8, die seit einem Schuljahr nach dem OC unterrichtet worden ist, wurde in einer Klassenarbeit folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe:

Paula trainiert das Lösen von linearen Gleichungen am Beispiel:

$$1{,}25y - 0{,}5\cdot(1+0{,}5y) + 2{,}5 = -4{,}25 - 0{,}5\cdot(y-0{,}5) + 0{,}5y$$

Nach einer Reihe von Äquivalenzumformungen hat sie diese Gleichung vereinfacht zu:

$$y + 2 = -4\,.$$

Mit folgendem Kommentar gibt sie auf:

„Ich muss einen Fehler gemacht haben. Solche Gleichungen hatten wir noch nie. Hier kommt man nur weiter, wenn man einen Paragraphen R^- *benutzen darf.”*

a) Überprüfe, ob Paula ein Fehler unterlaufen ist.

b) Formuliere einen Paragraphen R^- *in Paulas Sinn.*

c) Was würdest du ihr antworten?

Die Aufgabe ist typisch für das OC und die dort praktizierte andere Aufgabenkultur (vgl. Kaune, 2001b): Die Schüler werden angeregt, über ihre und die Vorstellungen ihrer Mitschüler zu reflektieren und sich dann schriftlich zu äußern. Solche metakognitiven Aktivitäten bereiten auch metamathematische Einsichten vor.

Zur Lösung des Aufgabenteils a sind Termumformungen vorzunehmen und mit den Paragraphen zu legitimieren. Beim Aufgabenteil b ist zunächst die konkrete Situation in einem allgemeineren Licht zu analysieren und dann die gewonnene Erkenntnis allgemein als mathematischer Satz (Paragraph) zu formulieren. Gefordert ist also die Generierung von universell verwendbarem neuem Wissen. Mathematisch handelt es sich um das Erfinden eines neuen Satzes. Beim Aufgabenteil c geht es auch darum, den Stellenwert dieses Satzes im bisherigen Vertragswerk zu diskutieren.

3.3.2 Schülerlösungen

Aufgabenteil b

Tanja: $\S\, R^{-} \quad \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c \bigwedge_d a+b=c \Leftrightarrow a+b-d=c-d$

Henrik: $\S\, R^{-} \quad \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c \; a=b \Leftrightarrow a-c=b-c$

Frank: $\S\, R^{+} \quad \bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c \; a=b \Leftrightarrow a+(-c)=b+(-c)$

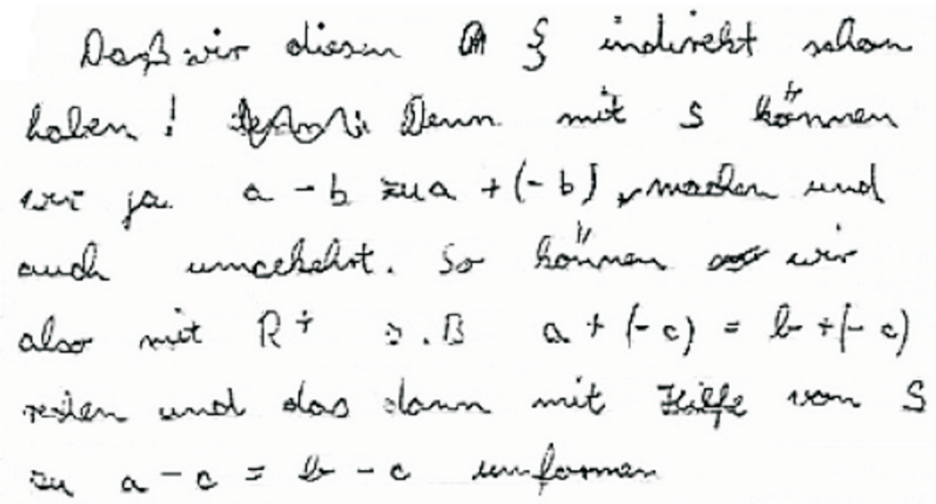
Aufgabenteil c

Tanja:

„Woher willst Du wissen, daß Du einen Fehler gemacht hast? Statt y+2=-4 kann man auch 1·y+2=-4 sagen und solche Gleichungen hatten wir immer schon. Außerdem haben wir nie einen § K gebraucht und werden ihn nicht gebrauchen, da dieses auch durch § K⁺ geregelt werden kann, indem man z.B +(-a) sagt.

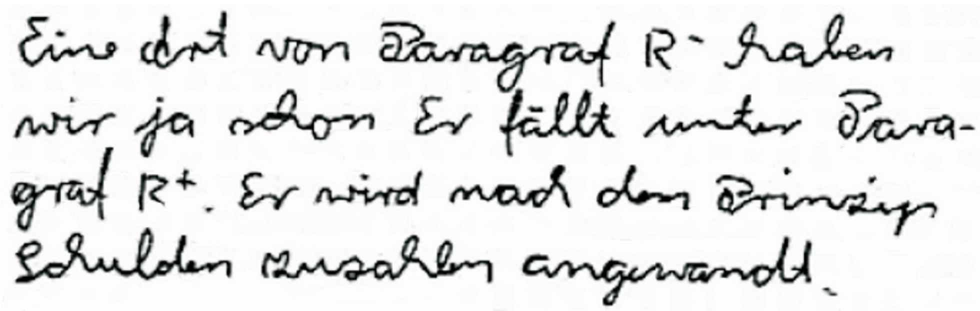
$$
\begin{array}{lll}
 & y+2=-4 & \\
\Leftrightarrow & y+2+(-2)=-4+(-2) & \S\, R^{+} \\
\Leftrightarrow & y+0 \;=-4+(-2) & \S\, 1^{+} \\
\Leftrightarrow & y+0 \;=-6 & * \\
\Leftrightarrow & 0+y \;=-6 & \S\, K^{+} \\
\Leftrightarrow & y \;=-6 & \S\, N^{+}
\end{array}
$$

Henrik:



Daß wir diesen ~~A~~ § indirekt schon haben! ~~...~~ Denn mit S^+ können wir ja $a - b$ zu $a + (-b)$ machen und auch umgekehrt. So können ~~...~~ wir also mit R^+ z. B. $a + (-c) = b + (-c)$ rechnen und das dann mit Hilfe von S zu $a - c = b - c$ umformen

Frank:



Eine Art von Paragraf R^- haben wir ja schon Er fällt unter Paragraf R^+. Er wird nach dem Prinzip Schulden bezahlen angewandt.

3.3.3 Interpretation

Alle drei Schülerlösungen sind als korrekt zu bewerten, dennoch gibt es Qualitätsunterschiede hinsichtlich der Tiefe des Verständnisses. Tanja orientiert sich mit ihrer Formalisierung sehr an der Termstruktur des Beispiels. Sie geht von Termen in Summenform aus, löst aber allgemein das Problem der Subtraktion eines beliebigen Terms. In ihrer Argumentation zeigt sie außerdem, dass man das Problem ohne die Benutzung eines neuen Satzes lösen kann. Das fassen wir als eine Vorform eines Beweises für ihren Satz auf. Henrik gibt eine allgemeine Lösung an und begründet, warum dieser neue Satz aus dem bisherigen Vertragswerk beweisbar ist. Frank gibt die allgemeine Lösung unter einem Namen und in einer Darstellung an, die dem Leser sofort auch die Beweisidee liefert. In seiner Argumentation macht er darüber hinaus auch deutlich, welchen Nutzen für ihn die Metapher „Soll und Haben" zum Verständnis hat.

3.4 Anwendungen im Themenbereich „Termumformungen mit Zahlen in Wurzeldarstellung”

Im OC werden alle Termumformungsregeln in der im vorigen Abschnitt dokumentierten Art behandelt. Die Trennung von Syntax und Semantik als Gegenstand des Osnabrücker Curriculums erlaubt es einmal, Sachverhalte in Axiomensystemen zu beweisen und dann auf verschiedene Interpretationen anzuwenden. Zum anderen ermöglicht sie mit den Schülern die Diskussion des Problems, inwieweit gewisse „Terme” einen Sinn ergeben bzw. nur Bedeutung vortäuschen und deshalb lediglich so aussehen, als ob sie Terme seien.

3.4.1 Eine Klassenarbeitsaufgabe

In einer Klasse 9, die seit zwei Schuljahren nach dem Osnabrücker Curriculum unterrichtet worden ist, wurde in einer Klassenarbeit folgende Aufgabe gestellt.

Aufgabe:

Vier Schülerinnen diskutieren die Lösung folgender Aufgabe:

Vereinfache, sofern möglich, den folgenden Term: $\sqrt{\sqrt{18}-4{,}5}\cdot\sqrt{\sqrt{18}+4{,}5}$.

Silke:	*„Zuerst habe ich geglaubt, das Ergebnis geht nicht. Aber jetzt weiß ich, es muss* $-\sqrt{2{,}25}$ *herauskommen und das ist –1,5.“*
Eva:	*„Das kann nicht sein, denn das Ergebnis ist syntaktisch falsch.“*
Michaela:	*„Nicht nur das Ergebnis, auch die erste Zeile muss falsch sein.“*
Ariane:	*„Jede Zeile ist falsch. Ich glaube, wir hätten gar nicht erst losrechnen dürfen...“*

a) *Welcher Äußerung von Silke stimmst du zu?*

b) *Warum meint Eva, dass das Ergebnis syntaktisch falsch sei?*

c) *Stimmst du Michaela zu?*

d) *Bewerte Arianes Äußerung.*

Auch diese Aufgabe ist typisch für das OC und die dort praktizierte andere Aufgabenkultur. In Kaune (2001b, S. 44) sind die Konstruktionsprinzipien und die intendierten Wirkungen solcher Aufgaben dargelegt.

Im Aufgabenteil a ist ein typischer Schüler angesprochen. Teil b dient auch dazu, den Focus der Schülerinnen und Schüler auf das Problem der Sinnleere gewisser formaler Schreibfiguren zu lenken. Die Aufgabenteile c und d sollen die Lernenden dazu anleiten, genauer darüber zu reflektieren, wo das Problem liegt.

3.4.2 Schülerlösungen

Aufgabenteil a

Markus:

$\sqrt{\sqrt{18}-4{,}5} \cdot \sqrt{\sqrt{18}+4{,}5}$

$= \sqrt{(\sqrt{18}-4{,}5)\cdot(\sqrt{18}+4{,}6)}$

$= \sqrt{18-4{,}5^2}$

$= \sqrt{-0{,}5}$

Die Aufgabe ist syntaktisch falsch, da in jeder Zeile ein Name für $\sqrt{0{,}5}$ steht, $\sqrt{-0{,}5}$ jedoch nicht als Zahlenname existiert.

Ich stimme nur Silkes Aussage zu, daß $-\sqrt{2{,}25} = -1{,}5$ ist. Denn das Ergebnis der Aufgabe ist nicht $-\sqrt{2{,}25}$, und das die Aufgabe nicht „geht", hätte sie genauer formulieren müssen.

Jutta:

Ich stimme Silke zu, wenn sie sagt, dass das Ergebnis „nicht geht", da es $\sqrt{-2{,}25}$ nicht gibt, denn egal ob man eine positive mit einer positiven Zahl oder eine negative mit einer negativen Zahl malnimmt, man erhält immer eine positive, nie eine negative Zahl. Ausserdem dachte Silke wahrscheinlich dass $\sqrt{-2{,}25} = -\sqrt{2{,}25}$ ist, was aber nicht so ist.

Marion:

Silkes erste Vermutung ist richtig, denn $\sqrt{-2{,}25}$ ist kein Zahlenname. Es gibt keine Zahl, die mit sich selber malgenommen $-2{,}25$ ergibt.

Aufgabenteil c

Markus:

Ja, ich stimme Michaela zu, denn da das Ergebnis syntaktisch falsch ist, stehen auch in vorherigen Zahlen jeweils ein Name für das Ergebnis, welches jedoch als Zahlen- ~~nahm~~ name nicht existiert.

Jutta:

Michaela hat recht, denn wenn man korrekt gerechnet hat, dann steht in der letzten Zeile dasselbe wie in der 1., und wenn die letzte Zeile dann syntaktisch falsch ist, so ist es die 1. auch.

Marion:

Die erste Zeile und die dazwischen muss auch falsch sein, da wir von der ersten Zeile an immer etwas daraus gefolgert haben und es stehen auch die Gleichheitszeichen und jede Zeile ist mit einem Paragraphen gedeckt

Aufgabenteil d

Markus:

Ariane hat in dem Punkt recht, indem
sie sagt, daß jede Zeile falsch ist.
Man durfte aber losrechnen, da man in
jeder Reihe Umformungen vorgenommen hat,
die sich durch Regeln, Gesetze oder Formeln
rechtfertigen lassen. Außerdem konnte man
am Anfang nicht erkennen, daß die
Aufgabe syntaktisch falsch ist.

Jutta:

Ariane hat auch recht, denn
wenn man korrekt gerechnet
hat, dann steht in jeder Zeile
dasselbe nur unter einem
anderen Namen. Und wenn dann
eine Zeile syntaktisch falsch ist, so
sind es alle anderen auch.
Sie hat auch recht, wenn sie sagt
wir hätten nicht losrechnen dürfen,
denn wenn die Aufgabe syntaktisch
falsch ist, dann wird alles andere
auch syntaktisch falsch.
Es ist aber verständlich, dass wir
losgerechnet haben, weil man
nicht auf den 1. Blick sehen
konnte, dass die Aufgabe syntaktisch
falsch ist.

Marion:

Man darf schon losrechnen, denn man sieht ja nicht auf Anhieb, dass der Term syntaktisch falsch ist. Das merkt man erst, nachdem man zuende gerechnet hat.

3.4.3 Interpretation

Markus macht in seiner Rechnung zu Teil a am Ende vermutlich zwei Fehler. Das falsche Resultat erlaubt ihm aber doch, die Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung weiter zu bearbeiten. Mit seiner Formulierung „Die Aufgabe ist syntaktisch falsch.“ knüpft er an sein Wissen aus dem Mathematikunterricht an (vgl. Cohors-Fresenborg, Griep, Kaune & Schwank, 2003, S. 51): Da es kein Objekt mit der benannten Eigenschaft gibt, ist der Zugriff mit einem Kennzeichnungsoperator, wie er in der Definition der Wurzelfunktion benutzt wird, nicht erlaubt. Deshalb verwendet er die Formulierung „syntaktisch falsch“.

Die Problematik, inwieweit durch den vermeintlichen Wurzelterm eine Bedeutung und damit ein Name (für eine Zahl) gegeben ist, wird noch deutlicher von Jutta angesprochen.

Marion begründet, dass der Syntaxfehler der letzten Zeile schon in der ersten vorhanden gewesen sein muss. Die Sichtweise des Rechnens als Anwendung von Paragraphen eines Vertragswerkes wird in ihrer Argumentation besonders deutlich.

Während Markus und Marion glauben, dass man „losrechnen” durfte, sieht Jutta, dass es eigentlich nicht erlaubt gewesen wäre los zu rechnen, aber man diese Erkenntnis nur gewinnen konnte, nachdem bereits gerechnet wurde. Jutta hat eine bemerkenswertes Verständnis des Argumentationsmusters indirekter Beweise.

4. Zusammenfassung

Wir haben in diesem Papier aufgezeigt, wie man der oft beklagten Fragmentierung des mathematischen Wissens der Schülerinnen und Schüler entgegenwirken kann, nämlich mit dem Aufbau eines kognitiven mathematischen Betriebssystems in den Köpfen der Lernenden innerhalb der Klassen 7 und 8. Dessen zwei Bestandteile “Funktionen-Frame” und “Vertragswerke-Frame” bringen wesentliche Inhalte und Methoden der Schulmathematik zusammen. Wir haben dargelegt, wie Rechnen, Termumformungen, Definieren und Beweisen miteinander verzahnt sind. Auch Schülerinnen und Schüler verfügen über die Einsicht, wie folgender Dialog in einer Klasse 10 zeigt:

Lehrer: Was muss man können, wenn man beweisen will?

Clemens: Ja, das wichtigste ist, denk' ich mal, dass man das Vertragswerk draufhat, damit man auch weiß, von vornherein, was man machen darf, und was man nicht machen darf.

Lehrer: Ist Beweisen denn schwieriger als Rechnen?

John: Wenn man jetzt da 'n normalen Term stehen hätte, dann müsste, könnte man das ja auch nicht anders machen, als jetzt. Man müsste das ja auch irgendwo herholen, sein Wissen aus den Vertragswerken. Und das wär' auch nichts anderes als das mit den Variablen [*gemeint ist die Darstellung von Termumformungsregeln mit Variablen*].

5. Literatur

Cohors-Fresenborg, E. (1987): Action and Language – Two Modes of Representing Mathematical Concepts. In I. Wirszup & R. Streit (eds.), Developments in School Mathematics Education around the World, Proceedings of the UCSMP International Conference on Mathematics Education, 250-275. Reston: NCTM.

Cohors-Fresenborg, E. (1993a): Registermachine as a Mental Model for Understanding Computer Programming. In E. Lemut, B. du Boulay & G. Dettori (eds.), Cognitive Models and Intelligent Environments for Learning Programming, 235-248. Berlin: Springer.

Cohors-Fresenborg, E. (1993b): Integrating Algorithmic and Axiomatic Ways of Thinking in Mathematics Lessons in Secondary Schools. In Proceedings of South East Asia Conference on Mathematics Education (SEACME-6), 74-81. Surabaya.

Cohors-Fresenborg, E. (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. *Der Mathematikunterricht,* 47(1), 5-13.

Cohors-Fresenborg, E., Griep, M., Kaune, C. & Schwank, I. (2003): Sätze aus dem Wüstensand und ihre Interpretationen. Textbuch für Schülerinnen und Schüler, 5. überarbeitete Auflage; dazu passend Handbuch für Lehrerinnen und Lehrer, 3. überarbeitete Auflage. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2001): Mechanisms of the Taking Effect of Metacognition in Understanding Processes in Mathematics Teaching, in Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries, Selected Papers from the Annual Conf. on Didactics of Mathematics, Ludwigsburg 2001,
http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2001/index.html, 29-38.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003): Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition bei Verstehensprozessen im Mathematikunterricht. In L. Hefendehl-Hebeker & S. Hußmann (Hg.), Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie, 21-34. Hildesheim: Franzbecker.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1994): Das Rechnen mit dem Ungewissen. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1998): Vertragswerke über den Umgang mit Zahlen. Textbuch für Schülerinnen und Schüler, Handbuch für Lehrerinnen und Lehrer. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E., Schwippert, K. & Klieme, E. (2000): The Osnabrueck Curriculum: Mathematics as a Tool for the Representation of Knowledge – An Evaluation Study on the Basis of TIMSS-Instruments. In Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries, Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam 2000, http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/index.html, 44-55.

Davis, R.B. & McKnight, C. (1979): Modeling the processes of mathematical thinking. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, 2, 91-113.

Frauenknecht, H. (1993): Mathematik als Versuch, Mißverständnisse zu vermeiden. *Der Mathematikunterricht,* 39(3), 59-67.

Kaune, C. (1995): Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In H. G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hg.), Neue problem- und praxisbezogene Ansätze in der mathematikdidaktischen Forschung, 66-76. Köln: Aulis.

Kaune, C. (2001a): Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht*, 47(1), 14-34.

Kaune, C. (2001b): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe". *Der Mathematikunterricht*, 47(1), 35-46.

Lakoff, G. (1980): Metaphors we live by. Chicago: University of Chicago Press.

Schwank, I. (1990): Zur Analyse kognitiver Strukturen algorithmischen Denkens. In K. Haussmann & M. Reiss (Hg.), Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse, 31-54. Göttingen: Hogrefe.

Schwank, I. (1993): On the Analysis of Cognitive Structures in Algorithmic Thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(2), 209-231.

Sjuts, J. (1993): Zur didaktisch-methodischen Reorganisation des SI-Mathematikunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 39(3), 27-43.

Sjuts, J. (1999a): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Sjuts, J. (1999b): Metacognition in Mathematics Lessons. In Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries, Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern 1999. http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1999/index.html.